

٣-٤ إثبات التطابق في حالتي: SSS ,SAS
Proving Congruence—SSS, SAS

فيما سبق:

إثبات تطابق المثلثات باستعمال تعريف التطابق.

والآن:

- أستعمل المسلمة SSS لاختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS لاختبار تطابق المثلثات.

المفردات:

الزاوية المحصورة
Included Angle

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تُعدّ السبورة المزدوجة على صورة الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات، لا لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنّها تكون ثابتةً تمامًا عند وضع الذراعين الجانبيين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه ويتم تثبيتهما على أبعاد متساوية من القمة على الجانبين فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما $\triangle ABC, \triangle XYZ$.

مسلمة SSS : ستكتشف في هذا الدرس أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنّه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما تنصّ عليه المسلمة الآتية:

أضف إلى مطويتك

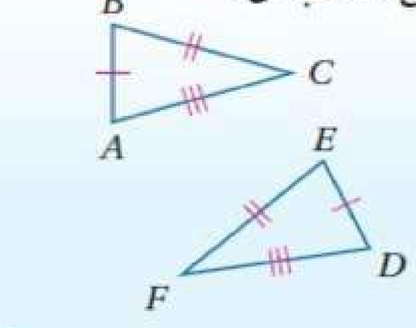
مسلمة 3.1
التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال إذا كان

$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\quad \overline{BC} \cong \overline{EF},\quad \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

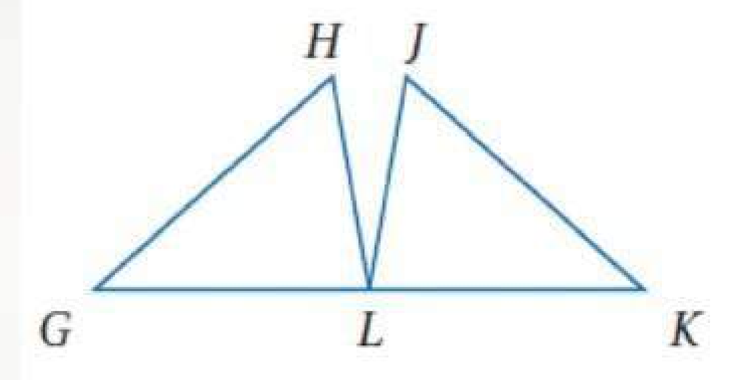
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$





مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

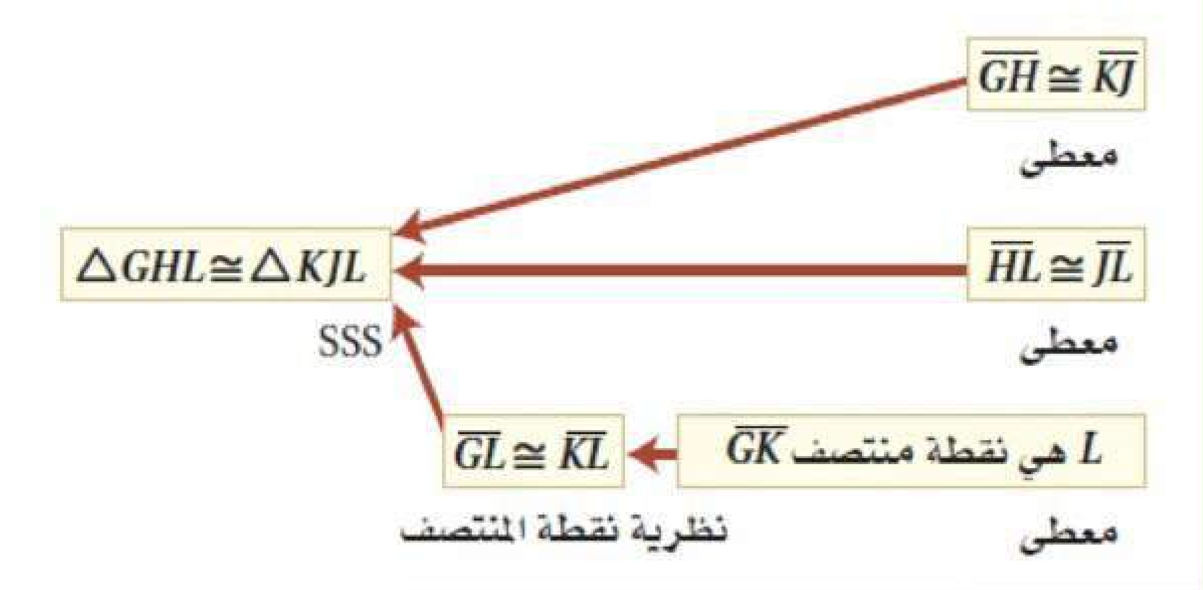
اكتب برهانًا تسلسليًّا.



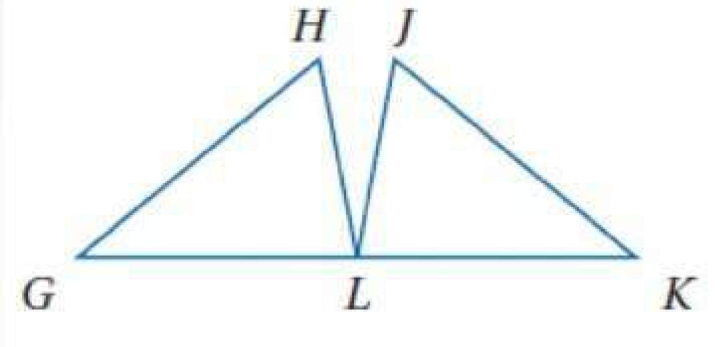
المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:



مثال 1 استعمال المسلمة SSS لإثبات تطابق مثلثين

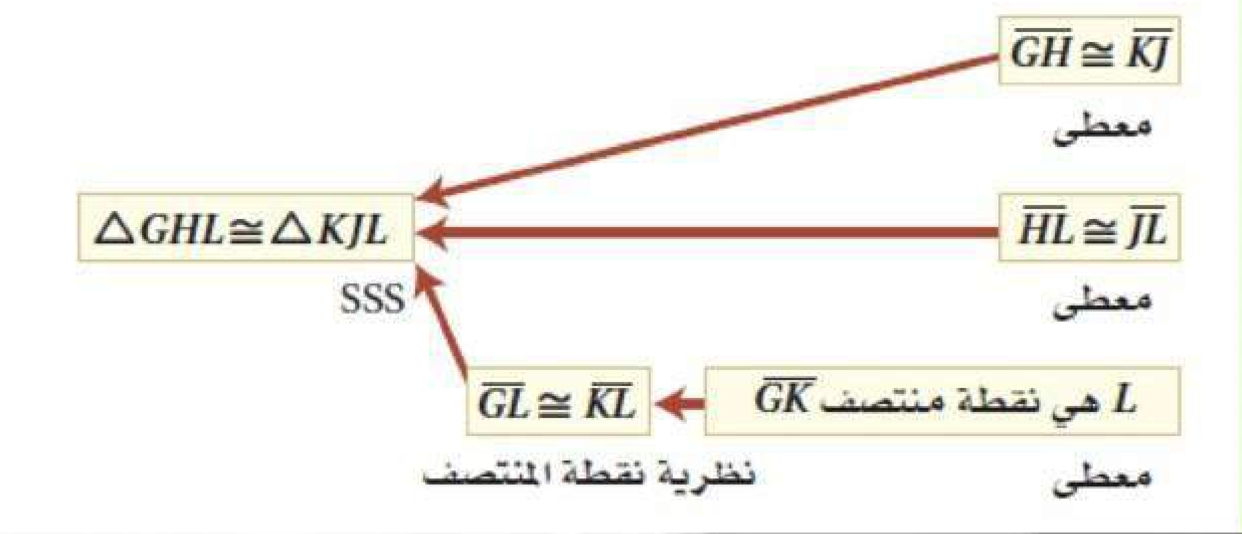


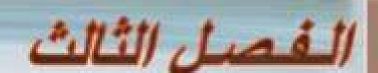
اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\overline{HL} \cong \overline{JL}$, $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ، L نقطة منتصف $\overline{GK}$.

المطلوب: إثبات أن $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

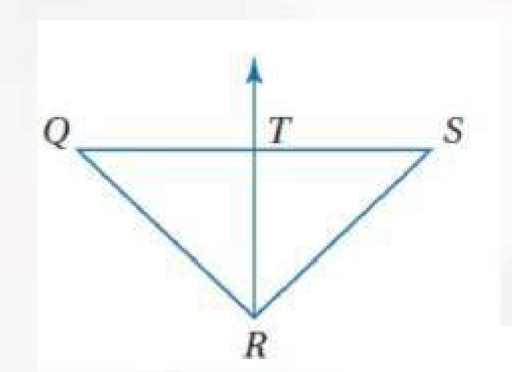
البرهان:







1) اكتب برهانًا تسلسليًّا.



المعطيات: $\triangle QRS$ متطابق الضلعين، فيه، $\overline{QR} \cong \overline{SR}$.

$\overline{RT}$ تنصّف $\overline{QS}$ عند النقطة T.

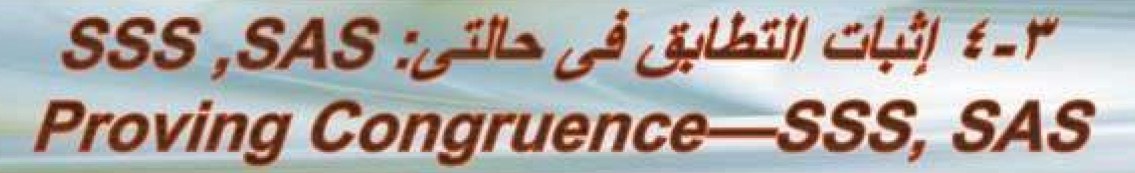
المطلوب: إثبات أنّ $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

1) البرهان:

- $\triangle QRS$ متطابق الضلعين فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$ — معطى
- $\overline{RT}$ تنصف $\overline{QS}$ في النقطة T — معطى
  - ↓ T نقطة منتصف $\overline{QS}$ — تعريف منصف القطعة المستقيمة
  - ↓ $\overline{QT} \cong \overline{ST}$ — نظرية نقطة المنتصف
- $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ — خاصية الانعكاس

← $\triangle QRT \cong \triangle SRT$ — SSS





مثال 2 على اختبار معياري

إجابة مطولة: إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$.
ورؤوس المثلث EFG هي: $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$.

a) مثّل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.

b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسّر إجابتك.

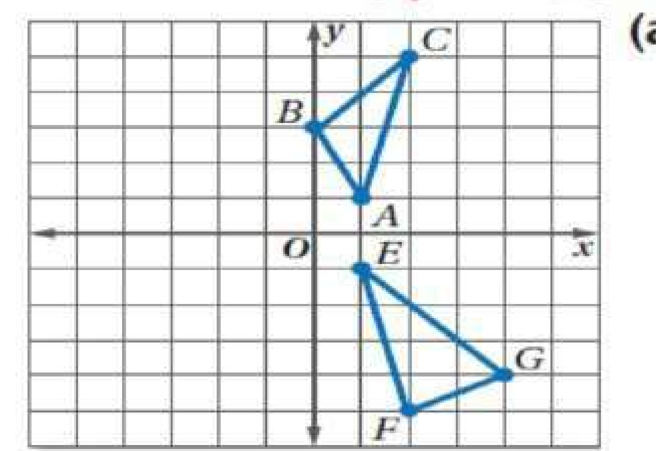
c) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

اقرأ سؤال الاختبار:

يُطلب إليك في هذه المسألة عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلًا من $\triangle ABC$, $\triangle EFG$ في مستوى إحداثي واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ أم لا اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليك في الجزء c أن تثبت صحّة تخمينك.

حل سؤال الاختبار:

a)



b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمن أنهما ليسا متطابقين.





c) استعمل صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$AB = \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$EF = \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$BC = \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$FG = \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

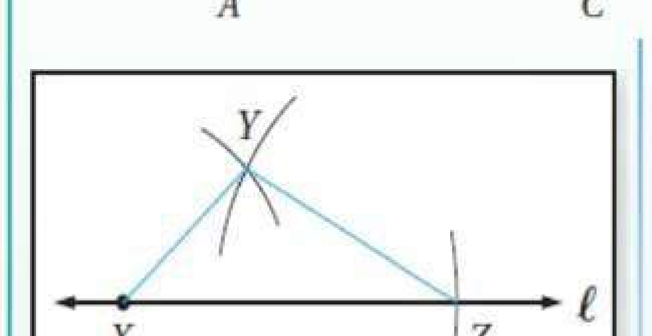
$$AC = \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$EG = \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

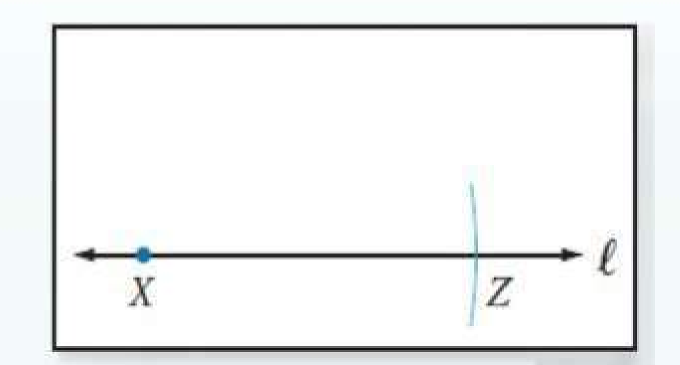
وبما أن $AB = FG, AC = EF$، على حين أن $BC \neq EG$. فإن شروط مسلمة التطابق SSS غير متحققة؛ إذن $\triangle ABC \ncong \triangle EFG$.

إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال الأضلاع (SSS)

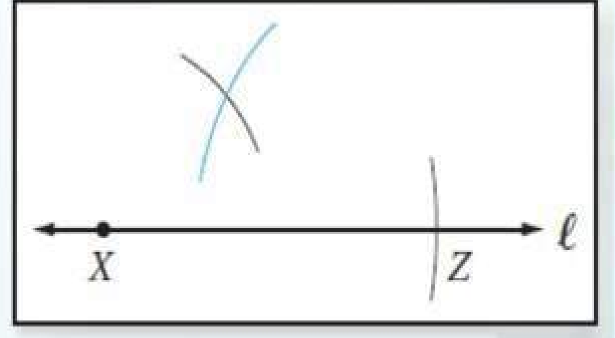


ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلمة SSS لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.



الخطوة 1 عيّن النقطة X على المستقيم ℓ. ثم أنشئ $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$ على ℓ كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة A، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة C.
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها ركز رأس الفرجار في X وارسم قوسًا يقطع المستقيم ℓ وسم نقطة التقاطع Z.



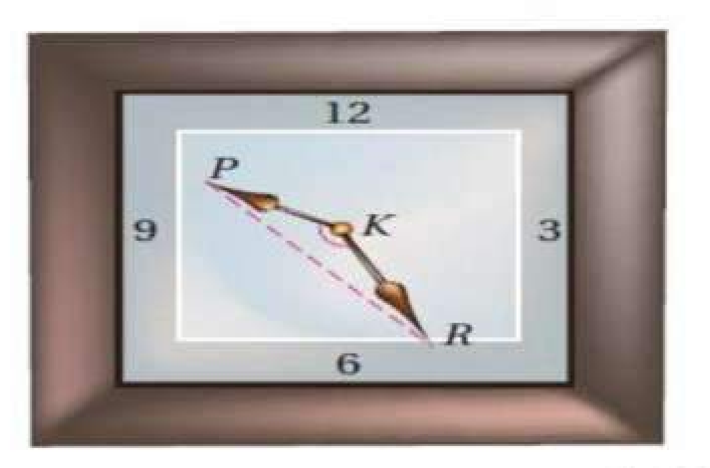
الخطوة 2 أنشئ قوسًا طول نصف قطره AB، ومركزه X، وقوسًا آخر طول نصف قطره BC، ومركزه Z.

الخطوة 3 سمِّ نقطة تقاطع القوسين Y. وارسم $\overline{XY}, \overline{ZY}$ لتشكل $\triangle XYZ$.





المسلمة SAS: تُسمّى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمّل الزاوية المحصورة JKL والمتكونة من عقربي الساعة الأولى. وكلما شكّل العقربان زاوية لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفي العقربين $\overline{PR}$, $\overline{JL}$ متساويتين.





$\triangle PKR \cong \triangle JKL$

أي مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:



مسلمة 3.2

أضف إلى مطويتك

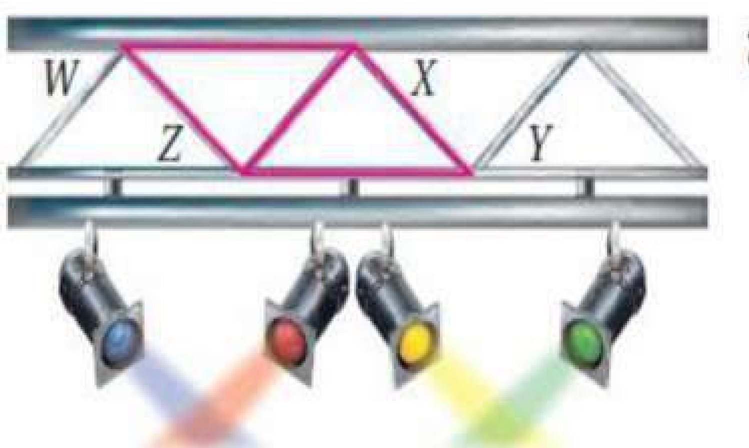
التطابق بضلع - زاوية - ضلع (SAS)

التعبير اللفظي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإنّ المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{DE}$,
$\angle B \cong \angle E$,
$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,
فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



استعمال SAS لإثبات تطابق المثلثات



إضاءة: تبدو دعامات السقّالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنّها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان $\overline{WZ} \cong \overline{YX}, \overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ، فاكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\overline{WZ} \cong \overline{YX}$	1) معطى
2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$	2) معطى
3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$	3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة
4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$	4) خاصية الانعكاس للتطابق
5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$	

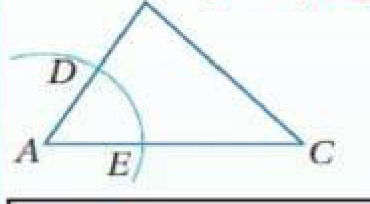


الربط مع الحياة

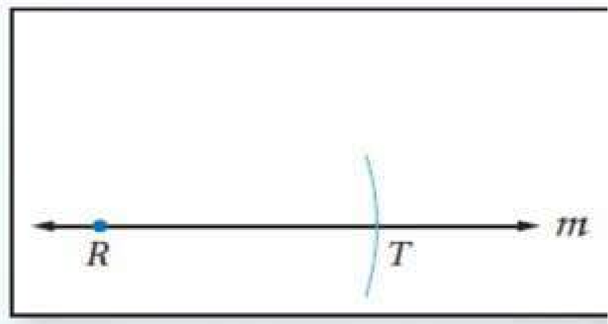
فنيو الإضاءة: في صناعة الصور المتحركة يقوم فنيو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

إنشاء هندسي

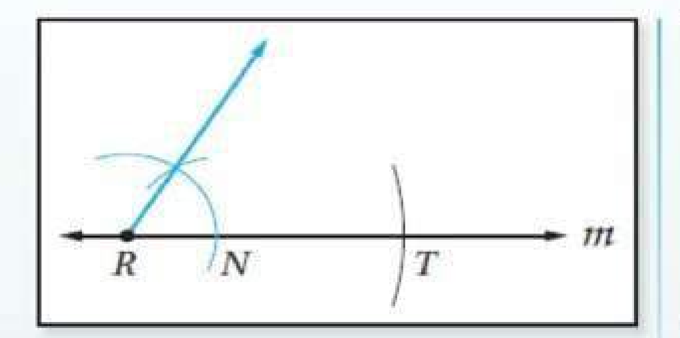
إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)



ارسم مثلثًا وسمِّه $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسلمة SAS لتنشئ $\triangle RST$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

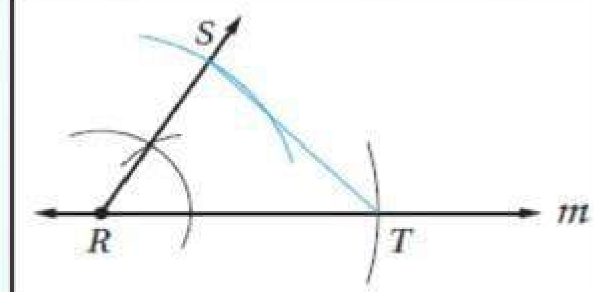


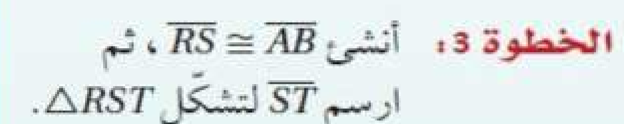
الخطوة 1: عيِّن النقطة R على المستقيم m. ثم أنشئ $\overline{RT} \cong \overline{AC}$ على m .



الخطوة 2: أنشئ $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال $\overline{RT}$ ضلعًا للزاوية، والنقطة R رأسًا لها كما يأتي:

- ضع رأس الفرجار على النقطة A، وارسم قوسًا يقطع ضلعي $\angle A$. سمِّ نقطتي التقاطع D, E .
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند R وارسم قوسًا يبدأ فوق المستقيم m ويقطعه، سمِّ نقطة التقاطع N.
- ضع رأس الفرجار عند E وعدِّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى D.
- دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة N ، وارسم قوسًا يقطع القوس الذي رسمته سابقًا.





الخطوة 3: أنشئ $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم $\overline{ST}$ لتشكّل $\triangle RST$.





٣-٤ إثبات التطابق في حالتي: SSS , SAS
Proving Congruence—SSS, SAS

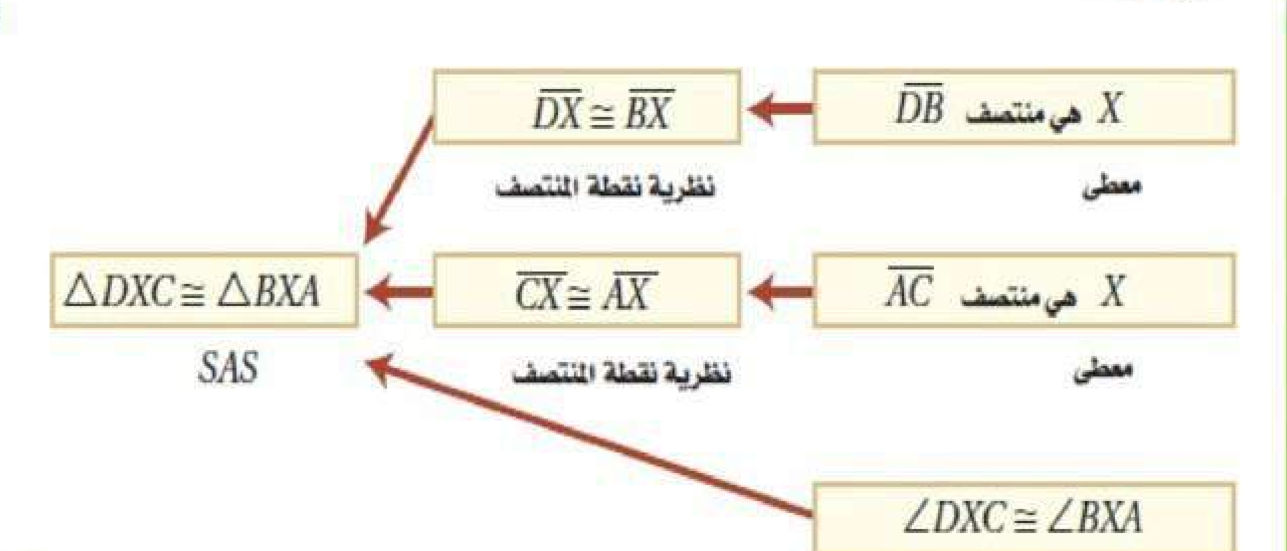
مثال 4 استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة SAS في البراهين

اكتب برهانًا تسلسليًّا لما يلي.

المعطيات: X منتصف $\overline{BD}$
و X منتصف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

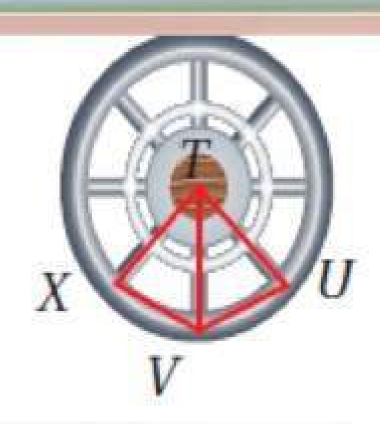
البرهان:



إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية
يمكن كتابة البراهين التسلسلية إما رأسيًا أو أفقيًا.





4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ وَ $\angle XTV \cong \angle UTV$، فبين أن $\triangle XTV \cong \triangle UTV$.

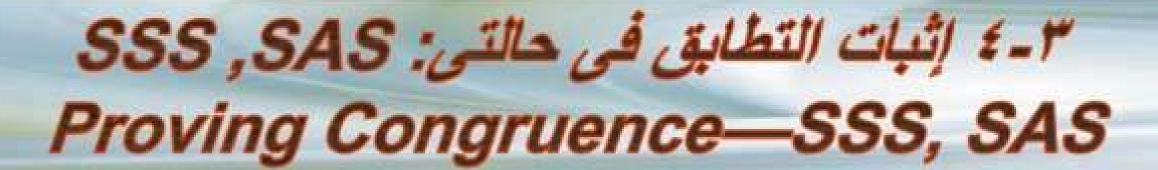
4) **المعطيات:** $\overline{TU} \cong \overline{TX}$

$\angle XTV \cong \angle UTV$

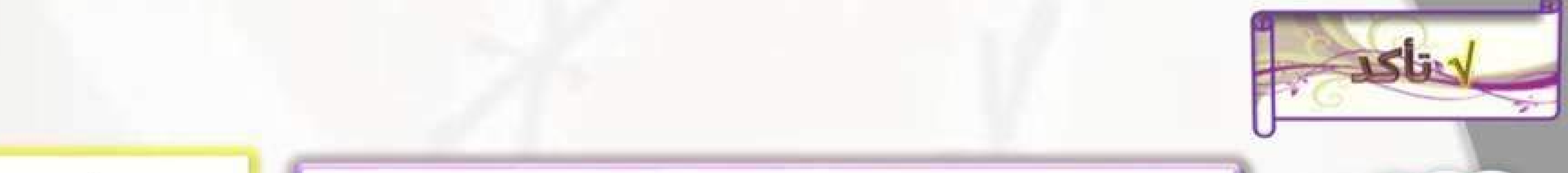
المطلوب: $\triangle XTV \cong \triangle UTV$

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\angle XTV \cong \angle VTU$, $\overline{TU} \cong \overline{TX}$	1) معطى
2) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$	2) خاصية الانعكاس
3) $\triangle XTV \cong \triangle UTV$	3) SAS

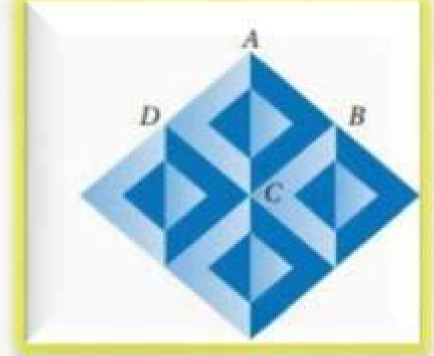






المثال ١

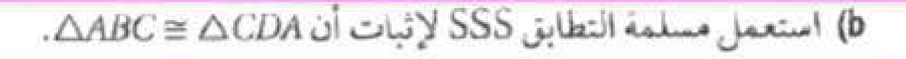
1) **الخداع البصري:** في الشكل المقابل المربع $ABCD$ يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكّل النمط.





الحل

عدد المثلثات المختلفة =2



$AB = CD$, $DA \cong BC$ (1
(معطيات)

$AB \cong CD$, $DA \cong BC$ (2
(تعريف تطابق القطع المستقيمة)

$CA \cong AC$ (3
(خاصية االنعكاس في التطابق)

(SSS) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (4



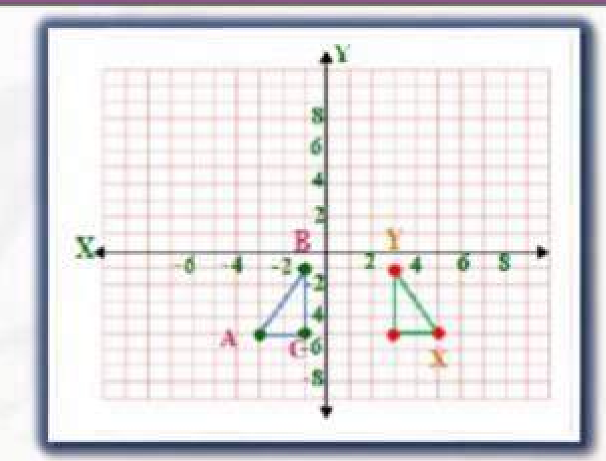




2) **إجابة مطولة :** إحداثيات رؤوس $\triangle ABC$ هي:
$A(-3, -5)$, $B(-1, -1)$, $C(-1, -5)$. ورؤوس $\triangle XYZ$ هي
$X(5, -5)$, $Y(3, -1)$, $Z(3, -5)$.



a) مثِّل كلا المثلثين في مستوى إحداثيٍّ واحدٍ.



b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفسِّر إجابتك.

يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان



c) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع b.



أطوال ΔABC

$A(-3,-5), B(-1,-1)$

$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-5))^2}$

$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$B(-1,-1), C(-1,-5)$

$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-1))^2+(-5-(-1))^2}$

$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$

$A(-3,-5), C(-1,-5)$

$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-3))^2+(-5-(-5))^2}$

$\sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$

$AB = \sqrt{20}, BC = 4, AC = 2$

أطوال ΔXYZ

$X(5,-5), Y(3,-1)$

$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2+(-1-(-5))^2}$

$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

$Y(3,-1), Z(3,-5)$

$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2+(-5-(-1))^2}$

$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$

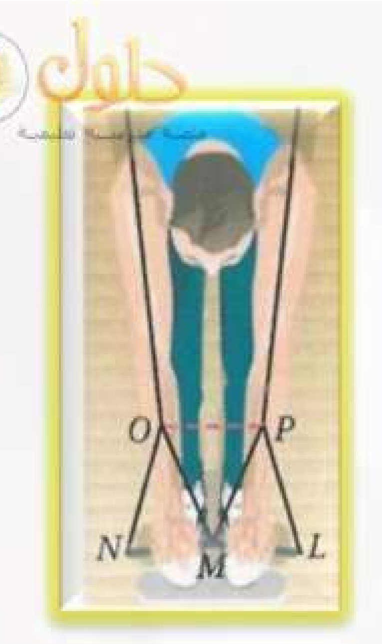
$X(5,-5), Z(3,-5)$

$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2+(-5-(-5))^2}$

$\sqrt{4+0} = 2$

$XY = \sqrt{20}, YZ = 4, XZ = 2$

نلاحظ أن $XY=AB, YZ=BC, XZ=AC$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة ,وعليه، فإن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ حسب SSS





3) رياضة: في الشكل المجاور، إذا كان: $\overline{LP} \cong \overline{NO}$ ، $\angle LPM \cong \angle NOM$ ، $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع، فاكتب برهانًا حرًا لإثبات أنّ $\triangle LMP \cong \triangle NMO$.



نعلم أن $LP \cong NO$, $\angle LPM \cong \angle NOM$

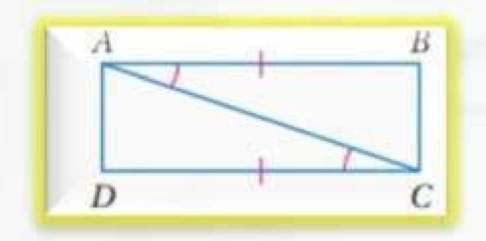
وبما أن $\triangle MOP$ متطابق الأضلاع

فإن $MO \cong MP$

من تعريف المثلث المتطابق الاضلاع

ولذلك فإن $\triangle LMP \cong \triangle NMO$

حسب مسلمة التطابق SAS





4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$

المطلوب: $\overline{BC} \cong \overline{DA}$



1) $\overline{BA} \cong \overline{DC}$, $\angle BAC \cong \angle DCA$ (معطيات)

2) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

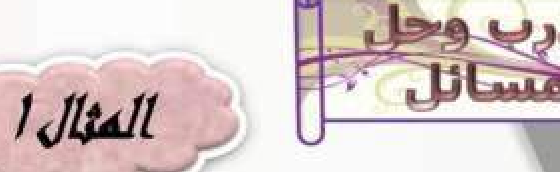
3) $\triangle BCA \cong \triangle DAC$ (SAS)



4) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)





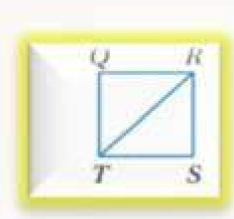




5) برهان حرٌّ

المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR}$, $\overline{ST} \cong \overline{QT}$

المطلوب: $\triangle QRT \cong \triangle SRT$



الحل

$QR = SR$, $ST = QT$

$RT = RT$ حسب خاصية االنعكاس

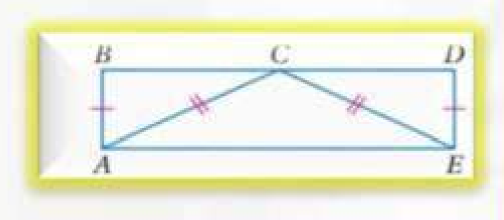
$\Delta QRT \cong \Delta SRT$ حسب SSS

6) برهان ذو عمودين

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\overline{CA} \cong \overline{CE}$

$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

المطلوب: $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



الحل

$AB = ED$, $CA=CE$

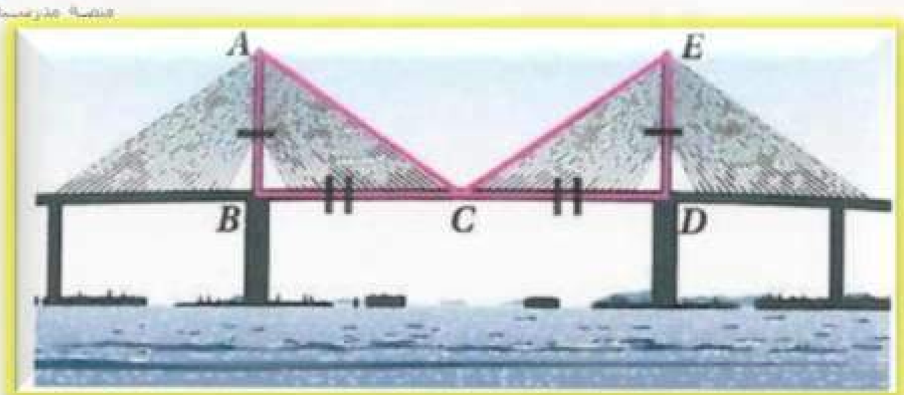
BD تنصفAC

BD منتصفC

$BC = CD$

$\Delta ABC \cong \Delta EDC$ حسب SSS





7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763 m، وهو مثبت بحبال معدنيّة معلقة بِدعامتين خرسانيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت $AB = ED$: فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان.



1) $AB \cong ED$، $\angle ABC$ و $\angle EDC$ قائمتان،
C نقطة منتصف BD (معطيات)

2) $\angle EDC \cong \angle ABC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

3) $BC \cong CD$ (نظرية نقطة المنتصف)

4) $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ حسب (SAS)





8) $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$





$Q(-4.4), R(-7.1)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-4))^2 + (1-4)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$Q(-4,4), S(-3,0)$

$$d_{(QS)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-4))^2+(0-4)^2}$$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$

$R(-7,1), S(-3,0)$

$$d_{(RS)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-3-(-7))^2+(0-1)^2}$$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

Δ MNO

$N(5,2), O(1,1)$

$$d_{(NO)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1-5)^2+(1-2)^2}$$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$M(2,5), N(5,2)$

$$d_{(MN)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(5-2)^2+(2-5)^2}$$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$M(2,5), O(1,1)$

$$d_{(MO)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2+(1-5)^2}$$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$MN = \sqrt{18}, NO = \sqrt{17}, MO = \sqrt{17}$
$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$

بما أن كل زوج من الاضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

$\Delta QRS \cong \Delta MNO$ حسب SSS



$M(0,-1), N(-1,-4), O(-4,-3), Q(3,-3), R(4,-4), S(3,3)$ (9



ΔMNO

$M(0,-1), N(-1,-4)$

$d_{(MN)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-0)^2+(-4-(-1))^2}$

$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$N(-1,-4), O(-4,-3)$

$d_{(NO)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-1))^2+(-3-(-4))^2}$

$\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$M(0,-1), O(-4,-3)$

$d_{(MO)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-4-0)^2+(-1-(-3))^2}$

$\sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$MN = \sqrt{10}, NO = \sqrt{10}, MO = \sqrt{20}$

Δ QRS

$Q(3,-3), R(4,-4)$

$d_{(QR)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2+(-4-(-3))^2}$

$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$R(4,-4), S(3,3)$

$d_{(RS)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2+(3-(-4))^2}$

$\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

$Q(3,-3), S(3,3)$

$d_{(QS)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2+(3-(-3))^2}$

$\sqrt{0+36} = 6$

$QR = \sqrt{2}, RS = \sqrt{50}, QS = 6$

بما أن الاضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فان المثلثين ليسا متطابقين



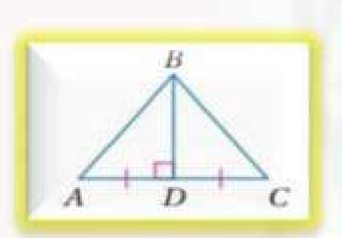


برهان :اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

10) برهان ذو عمودين

المعطيات، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$,
$\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$

المطلوب، $\triangle ABD \cong \triangle CBD$





1) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (معطيات)

2) $\angle BDA , \angle BDC$ قائمتان (تعريف التعامد)

3) $\angle BDA \cong \angle BDC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

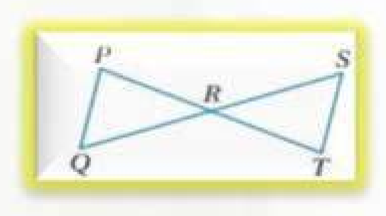
6) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ حسب مسلمة (SAS)



11) برهان حرّ

المعطيات، R نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{QS}$, $\overline{PT}$

المطلوب، $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$

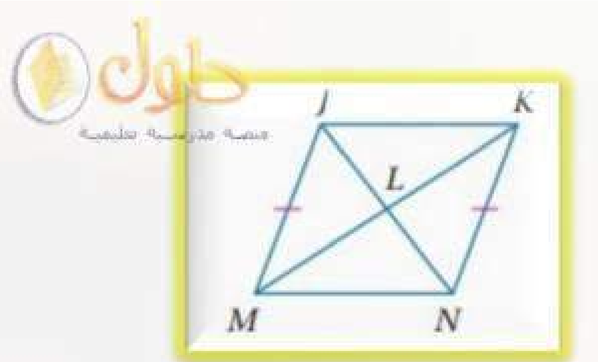


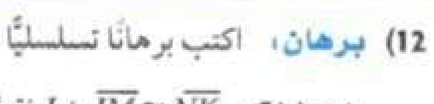


بما أن R نقطة المنتصف لكل من $\overline{QS}$ ، $\overline{PT}$ ، فإن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$

و $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$ من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك $\angle PRQ \cong \angle TRS$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

إذن $\Delta PRQ \cong \Delta TRS$ حسب مسلمة(SAS)





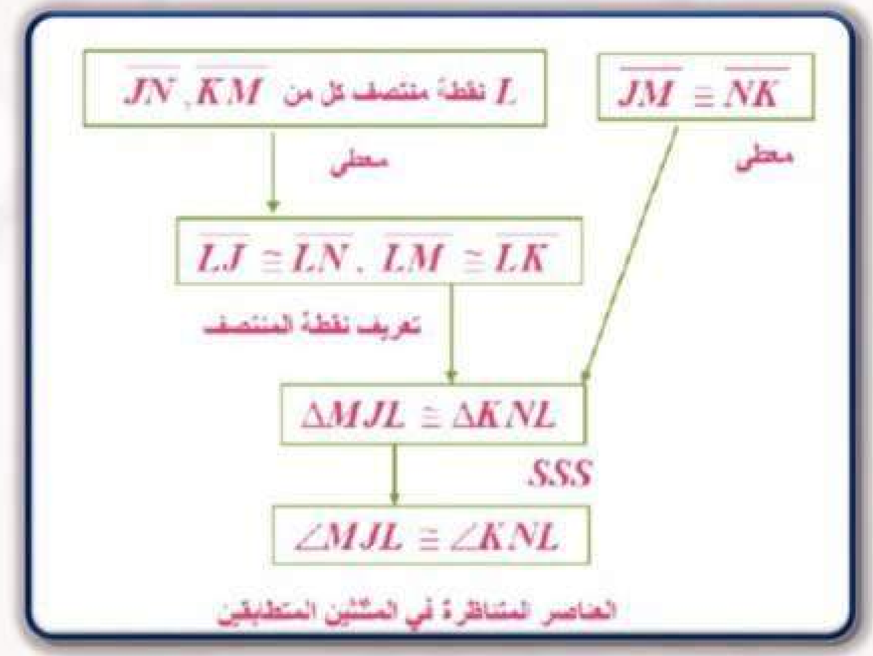
12) برهان: اكتب برهانًا تسلسليًا

المعطيات: $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ؛ L نقطة المنتصف لكلٍّ من $\overline{KM}$ ، $\overline{JN}$

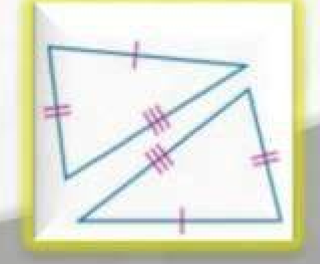
المطلوب: $\angle MJL \cong \angle KNL$

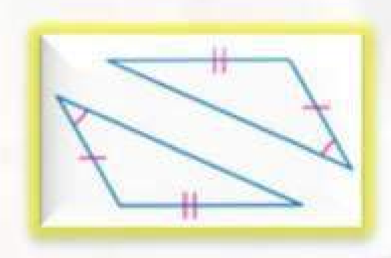


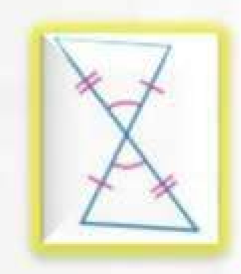




حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا .وضح إجابتك.









متطابقين (مسلمة SSS)

لا يوجد تطابق

متطابقين (مسلمة SAS)





16) **إشارة تحذيرية:** استعمل الشكل المجاور.

a) ما اسم المجسم الذي تمثّله إشارة التحذير.



المجسم يسمى :هرم



b) إذا كان $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ، فأثبت أنّ $\triangle ACB \cong \triangle ACD$.

1) $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{CB}$ (معطيات)

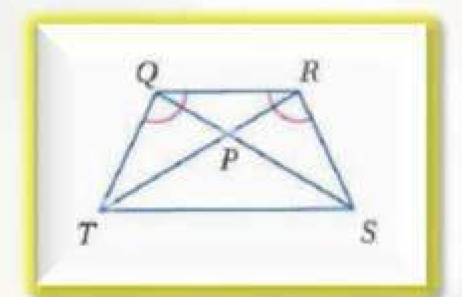
2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

3) $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ حسب مسلمة (SSS)

c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

المجسم ثلاثي الابعاد ولذلك عندما يتم رسمه في المستوي الثنائي الابعاد فان الرسم المنظوري يجعله يبدو وكأن المثلثين مختلفان.





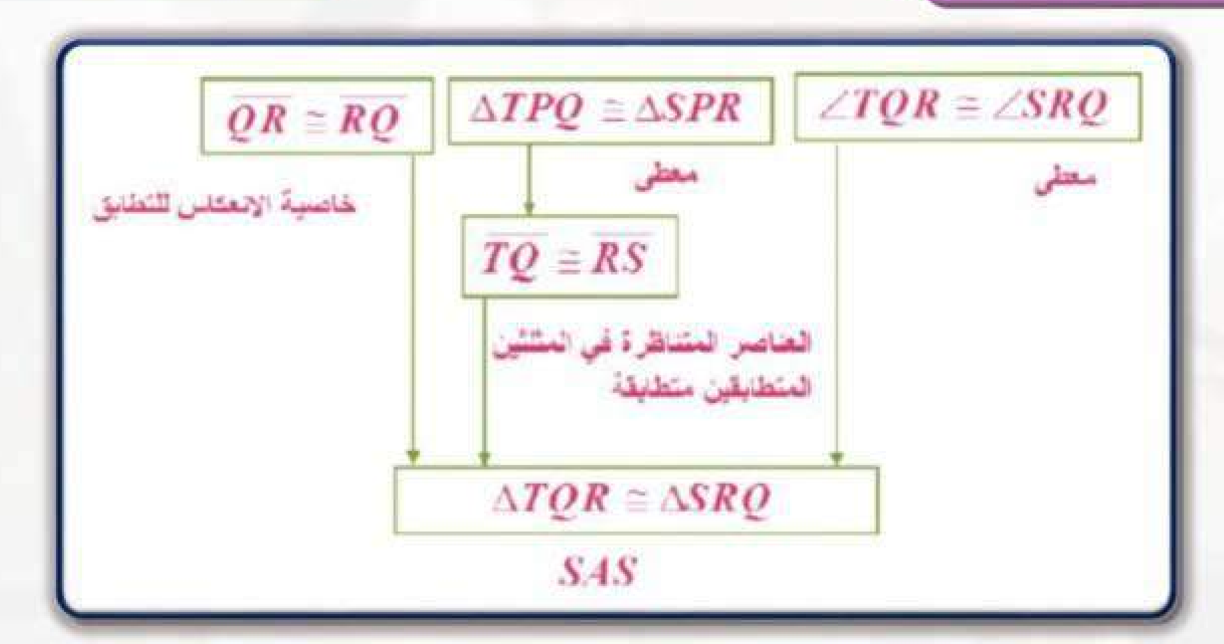
17) برهان: اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب: $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$







18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.

a) اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات أن $BD = AC$.



1) $CB \cong BA \cong AD \cong DC$ (معطيات)

2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle CDA \cong \angle BCD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta CDA$ حسب مسلمة (SAS)

5) $DB \cong AC$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

b) اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات أنّ $\angle BDC \cong \angle BDA$.

1) $CB \cong BA \cong AD \cong DC$ (معطيات)

2) $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BAD \cong \angle BCD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BCD \cong \Delta DBAD$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\angle BDC \cong \angle BDA$

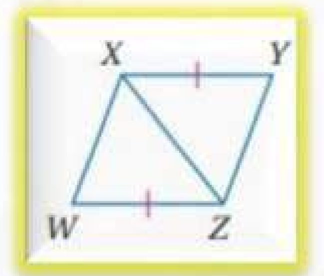
العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة



19) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات، $\overline{YX} \cong \overline{WZ}, \overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

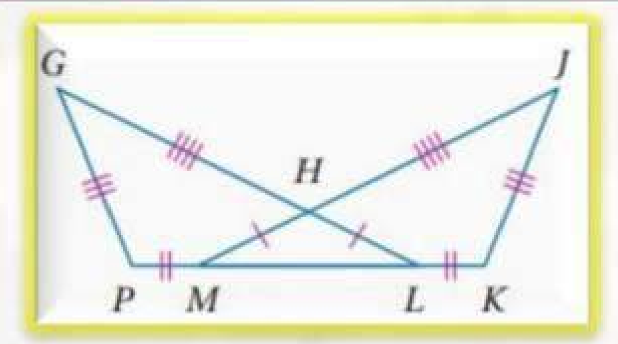
المطلوب، $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$



20) برهان، اكتب برهانًا حرًا.

المعطيات، $\overline{HL} \cong \overline{HM}, \overline{PM} \cong \overline{KL}, \overline{PG} \cong \overline{KJ}, \overline{GH} \cong \overline{JH}$

المطلوب، $\angle G \cong \angle J$





$\overline{YX} = \overline{WZ}, \overline{YX} \parallel \overline{ZW}$ (معطيات)

$\angle YXZ = \angle WZX$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

$XZ = XZ$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta YXZ = \Delta WZX$ حسب مسلمة (SAS)

$GH = JH, PG = KJ, HL = HM, PM = KL$

بما أن $GH = JH$ و $HL = HM$ إذن $GL = JM$

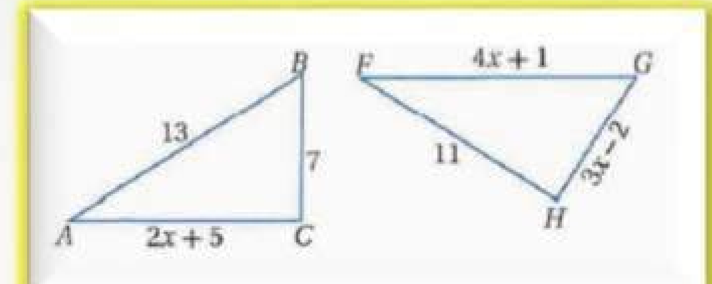
بما أن $GL = JM$ ، $PM = KL$ إذن $PL = KM$

إذن $\Delta GPL \cong \Delta JKM$

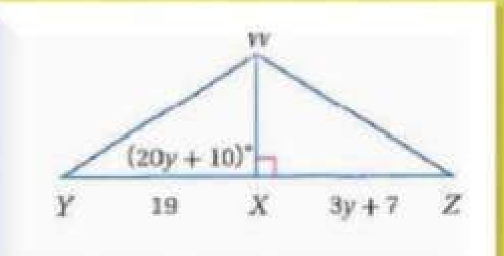
إذن $\angle G \cong \angle J$



$\triangle ABC \cong \triangle FGH$ (22



$\triangle WXY \cong \triangle WXZ$ (21





$\because \Delta FGH \cong \Delta ABC$

$\therefore GH = BC$

$3x - 2 = 7$

$3x = 9$

$x = 3$

$\because \Delta WXY \cong \Delta WXZ$

$\therefore XZ = XY$

$3y + 7 = 19$

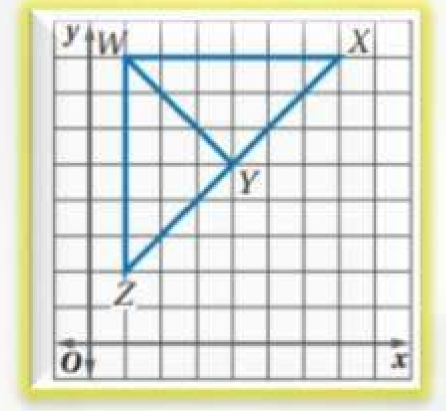
$3y = 12$

$y = 4$









23) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور:

a) صف طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أنّ $\triangle WYZ$ يطابق $\triangle WYX$. علمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأيّ طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضح إجابتك.

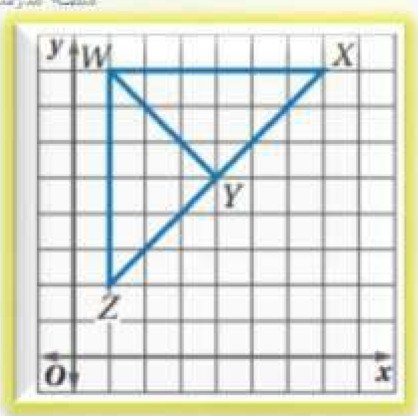
الحل

الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة **لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم تستعمل مسلمة التطابق** SSS.

الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كل من $\overline{ZX}$ ، $\overline{WY}$ وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYX$ ، $\angle WYZ$ كلتاهما قائمتين ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن XY تطابق YZ. وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$ ، فيمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما فى الطريقة الأولى.





b) أثبت أن $\triangle WYX \cong \triangle WYZ$ ووضّح إجابتك.



$Y\ (4,5), W\ (1,8)$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$Z\ (1,2), X\ (7,8)$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{7-1} = \frac{6}{6} = 1$$

ميل $\overline{WY}$ يساوي 1−وميل $\overline{ZX}$ يساوي ١ ، وبما أن ناتج ضربهما يساوي 1−

فإن $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$. وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من $\angle WYZ$ و $\angle WYX$

يساوي 90°. وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي

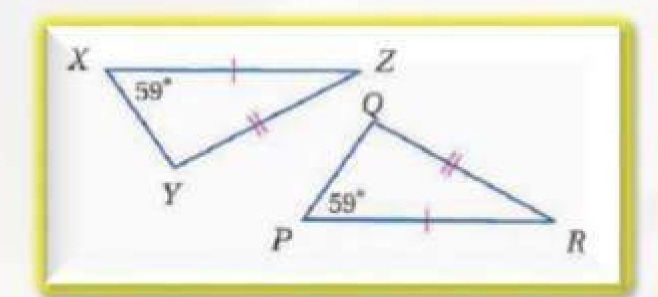
$$\overline{ZY} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4-7)^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ ، فإن $\Delta WYZ \cong \Delta WYX$ حسب مسلمة التطابق SAS.





24) **اكتشف الخطأ:** قال أحمد: إنّ $\triangle XYZ \cong \triangle PRQ$ بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.



خالد، لان الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة

25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمَي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

الحالة الاولى :إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الاول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخران متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.
الحالة الثانية :إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الاول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS

إثبات تطابق المثلثات ASA , AAS
Proving Triangles Congruent-ASA, AAS

فيما سبق:

درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SAS , SSS .

والآن:

- أستعمل المسلمة ASA لاختبار التطابق.
- أستعمل النظرية AAS لاختبار التطابق.

المفردات:

الضلع المحصور
Included Side

www.obeikaneducation.com

لماذا؟

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجوههم نحو مؤخرة القارب، وكل منهم يدفع مجدافًا. ويتطلب السباق عادة مسطحًا من الماء طوله 1500 متر على الأقل. ويمكن استعمال المثلثات المتطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة، مثل طول مضمار سباق الزوارق.



المسلمة ASA: يُسمى الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لمضلع **الضلع المحصور**. ففي $\triangle ABC$ المجاور، $\overline{AC}$ هو الضلع المحصور بين $\angle A$, $\angle C$.

مسلمة 3.3

التطابق بزاوية - ضلع - زاوية (ASA)

أضف إلى مطويتك

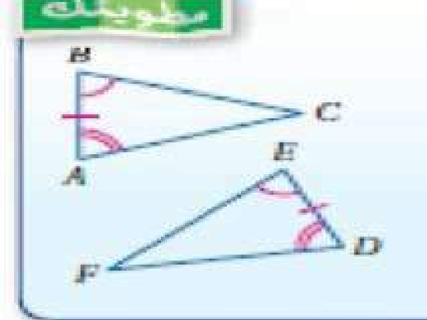
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال: إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$,

$\angle B \cong \angle E$,

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثًا مرسومًا باستعمال زاويتين والضلع المحصور (ASA)

ارسم مثلثًا وسمّه $\triangle ABC$، ثم استعمل المسلّمة ASA لتنشئ $\triangle XYZ$ الذي يطابق $\triangle ABC$.

الخطوة 1:

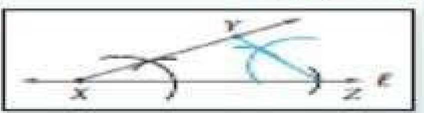


ارسم مستقيمًا ℓ، واختر عليه نقطة X. وأنشئ $\overline{XZ}$ على أن تكون $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$.

الخطوة 2:

أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle A$ عند النقطة X باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية.

الخطوة 3:



أنشئ زاوية مطابقة لـ $\angle C$ عند النقطة Z باستعمال $\overline{XZ}$ ضلعًا للزاوية. وسمّ نقطة تقاطع الضلعين الجديدين للزاويتين Y.





مثال 1 استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$

$\angle PSQ \cong \angle RSQ$.

المطلوب: $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

P S Q R

البرهان:

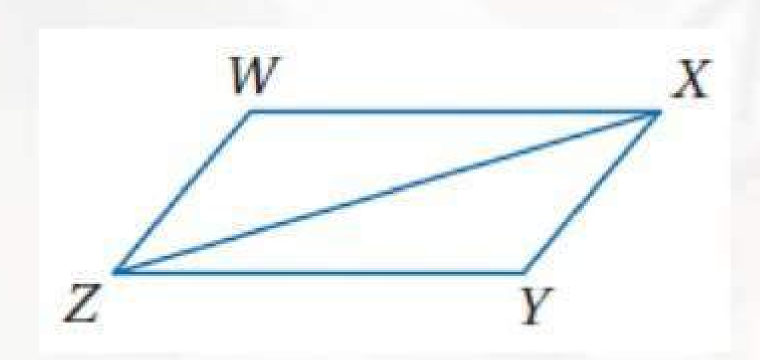
العبارات	المبررات
1) $\overline{QS}$ تنصّف $\angle PQR$ ، $\angle PSQ \cong \angle RSQ$.	1) معطيات
2) $\angle PQS \cong \angle RQS$	2) تعريف منصّف الزاوية
3) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$	3) خاصية الانعكاس للتطابق
4) $\triangle PQS \cong \triangle RQS$	4) ASA

إرشادات للدراسة

ضلع - ضلع - زاوية

طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة لايكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.





1) اكتب برهاناً حرًّا.

المعطيات: $\overline{ZX}$ تنصّف $\angle WZY$ ، $\overline{XZ}$ تنصّف $\angle YXW$.

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

1) بما أن $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$، إذن $\angle WZX \cong \angle YZX$ من تعريف منصِّف الزاوية. وكذلك $\overline{ZX}$ تنصِّف $\angle YXW$، إذن $\angle WXZ \cong \angle YXZ$ من تعريف منصف الزاوية، وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ من خاصية الانعكاس للتطابق. فإن $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$ بحسب المسلمة ASA



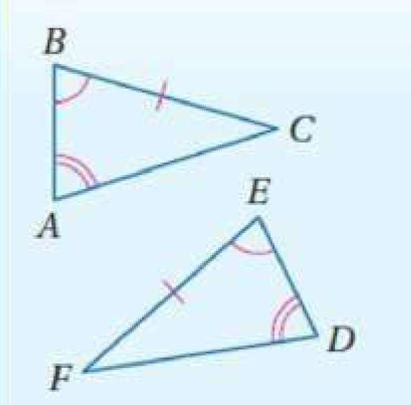
٣-٥ إثبات التطابق في حالتي: ASA ,AAS
Proving Congruence—ASA, AAS

نظريّة 3.5

أضف إلى مطويتك

التطابق بزاوية - زاوية - ضلع (AAS)

إذا طابقتْ زاويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



مثال إذا كانت $\angle A \cong \angle D$,

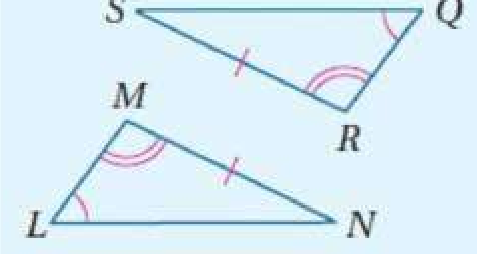
$\angle B \cong \angle E$,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$,

فإنّ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

برهان

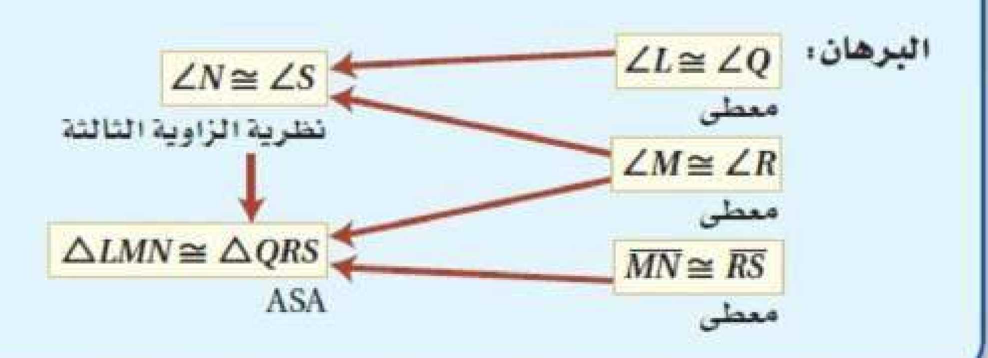
نظرية التطابق بزاوية - زاوية - ضلع (AAS)



المعطيات: $\angle L \cong \angle Q, \angle M \cong \angle R, \overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب: $\triangle LMN \cong \triangle QRS$

البرهان:



إرشادات للدراسة

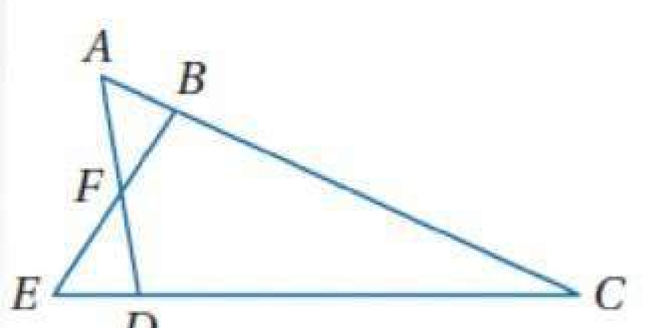
ضلع - ضلع - زاوية

طولا ضلعين وقياس زاوية غير محصورة لا يكفي لإثبات أن المثلثين متطابقان.






مثال 2 استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين

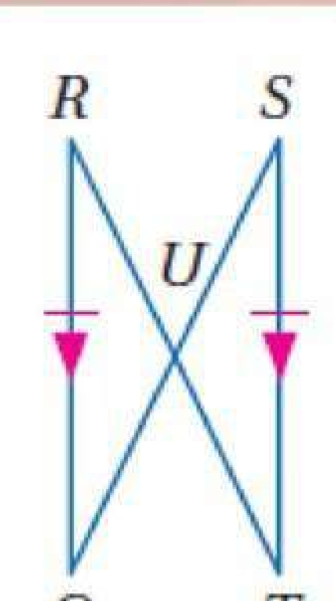


اكتب برهانًا حرًّا.

المعطيات: $\angle DAC \cong \angle BEC$, $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن $\angle DAC \cong \angle BEC$, $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، وأن $\angle C \cong \angle C$ بحسب خاصية الانعكاس، فإن $\triangle ACD \cong \triangle ECB$ بحسب النظرية AAS .

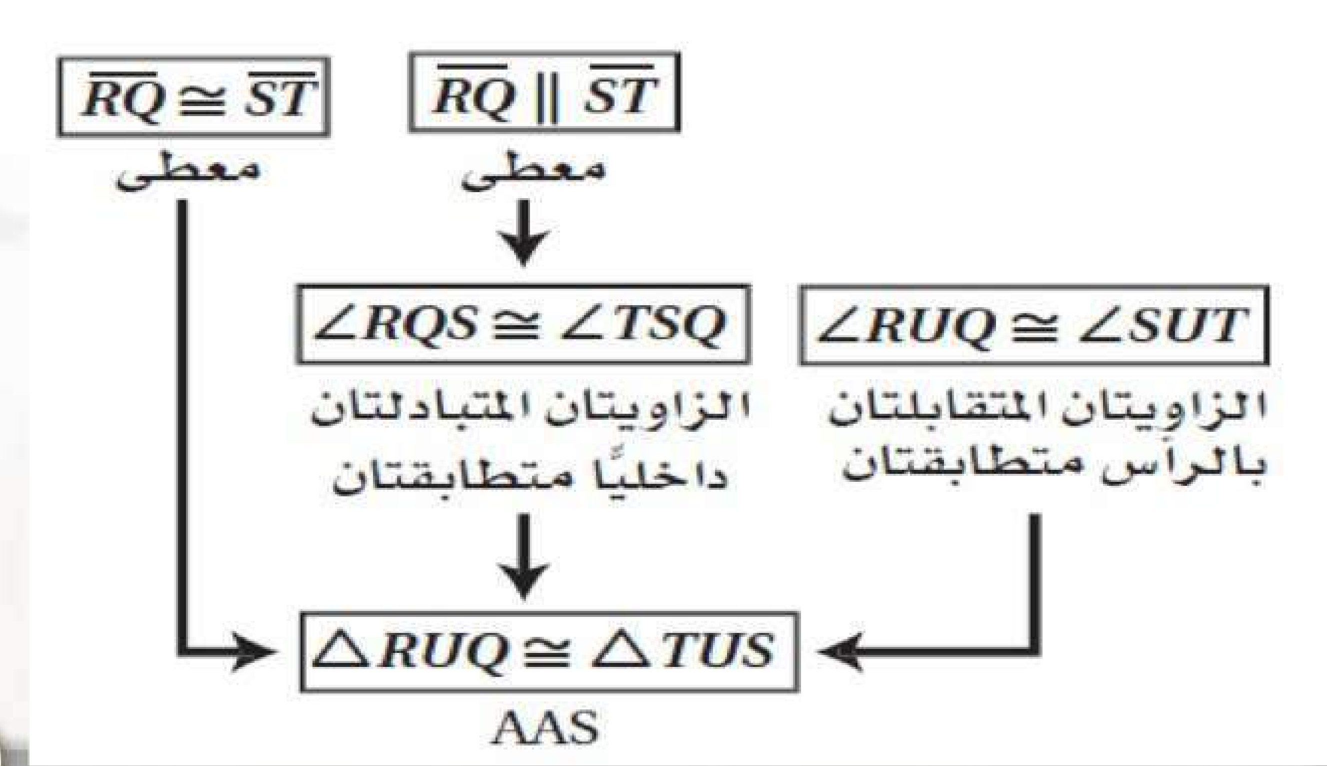


2) اكتب برهانًا تسلسليًّا:

المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

2) البرهان:





مثال 3 من واقع الحياة — استعمال تطابق المثلثات في حساب مسافات يصعب قياسها مباش

مسافات: أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين B , C. فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها نقطةً مرجعية بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول DE يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين B , C.



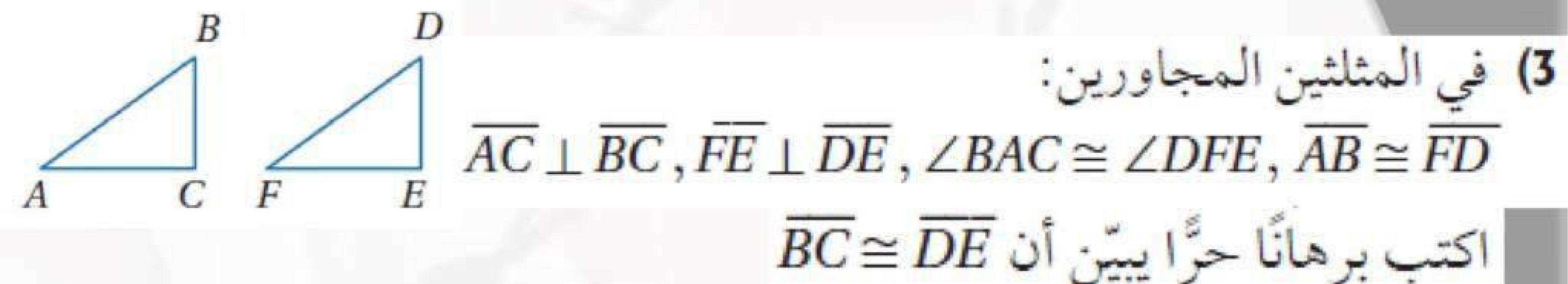
لتحديد طول $\overline{CB}$، يجب أولًا أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن $\overline{CD}$ عمودية على كل من $\overline{DE}$, $\overline{CB}$ كما هو مبيّن في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة. لذا $\angle BCA \cong \angle EDA$.
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$
- $\angle BAC$, $\angle EAD$ زاويتان متقابلتان بالرأس فهما متطابقتان. وبحسب ASA ينتج أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$.

وبما أن $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ فإن $\overline{DE} \cong \overline{CB}$؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول $\overline{DE}$ يساوي 8 ft فإن طول $\overline{CB}$ يساوي 8 ft أيضًا، وهي المسافة بين النقطتين C, B.

الفصل الثالث





3) في المثلثين المجاورين:

$\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{FE} \perp \overline{DE}, \angle BAC \cong \angle DFE, \overline{AB} \cong \overline{FD}$

اكتب برهانًا حرًّا يبيّن أن $\overline{BC} \cong \overline{DE}$





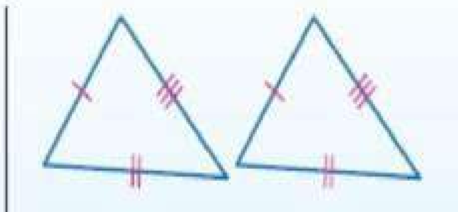
٣-٥ إثبات التطابق في حالتي: ASA ,AAS
Proving Congruence—ASA, AAS

ملخص المفاهيم



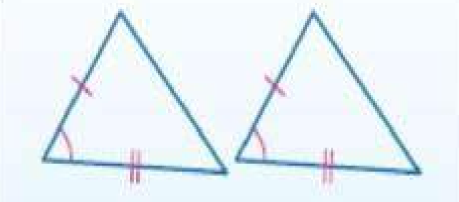
إثبات تطابق المثلثات

SSS



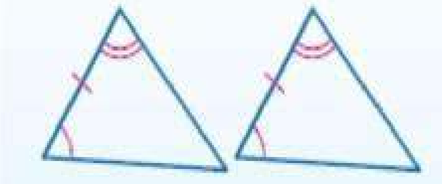
الأزواج الثلاثة من الأضلاع المتناظرة متطابقة.

SAS



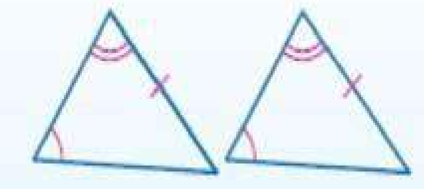
تطابق زوجين من الأضلاع المتناظرة والزاويتين المحصورتين بينهما.

ASA



تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة والضلعين المحصورين بينهما.

AAS



تطابق زوجين من الزوايا المتناظرة وضلعين غير محصورين.

٣-٥ إثبات التطابق في حالتي: ASA ,AAS
Proving Congruence—ASA, AAS



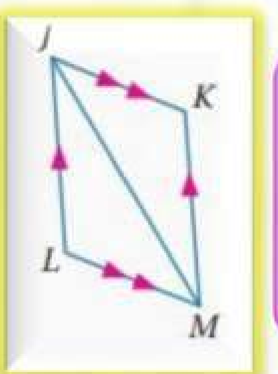


برهان، برهن كلًّا مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:

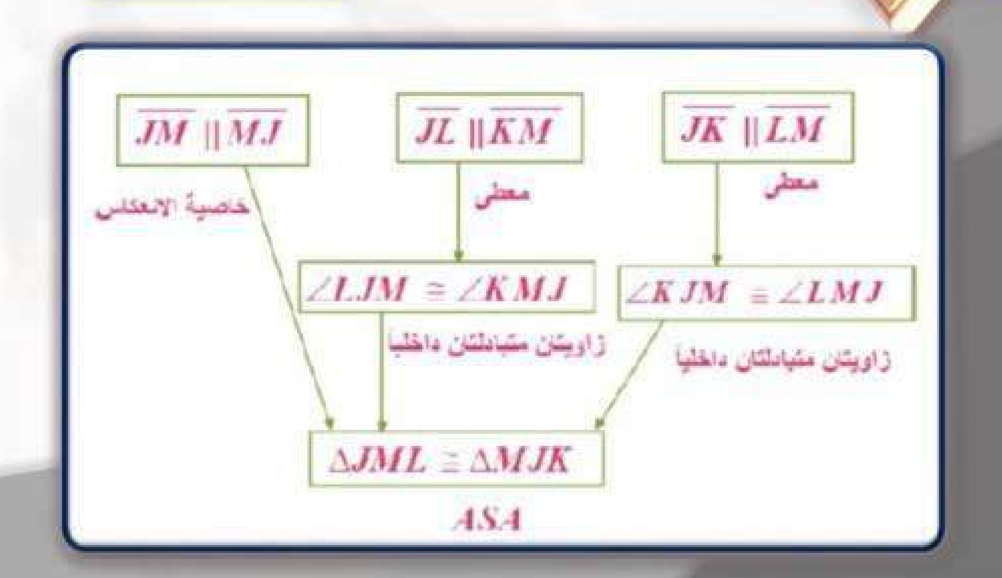
1) برهان تسلسلي

المعطيات، $\overline{JK} \parallel \overline{LM}, \overline{JL} \parallel \overline{KM}$

المطلوب، إثبات أن: $\triangle JML \cong \triangle MJK$



الحل

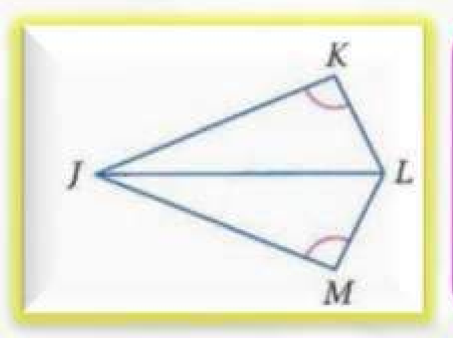


2) برهان حرّ

المعطيات، $\angle K \cong \angle M$,

$\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$.

المطلوب، إثبات أن: $\triangle JKL \cong \triangle JML$













3) **بناء جسور:** يحتاج مسّاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين A , B المبينتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضعَ وتدًا عند A، ووضع زميله وتدًا عند B في الجهة المقابلة، ثمّ عيّن المسّاح النقطة C في جهة A، بحيث كانت $\overline{CA} \perp \overline{AB}$. ووضع وتدًا رابعًا عند E، التي هي نقطة منتصف $\overline{CA}$. وأخيرًا وضع وتدًا عند النقطة D، بحيث كان $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط D, E, B تقع على مستقيمٍ واحدٍ.

a) وضّح كيف يمكن أن يستعمل المسّاح المثلثين المتكونين لإيجاد المسافة بين النقطتين A , B.



نعلم أن $\angle DCE$ ، $\angle BAE$ متطابقتان. لأنهما زاويتان قائمتان، $\overline{AE}$ تطابق $\overline{EC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعلم أن $\angle DEC \cong \angle BEA$. وبحسب ASA ، يعلم المساح أن $\Delta DCE \cong \Delta BAE$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ ، ولذا يمكن للمساح أن يقيس $\overline{DC}$ وبذلك يعرف المسافة بين $A.B$

b) إذا كان: $DE = 100\,m$, $DC = 60\,m$, $AC = 160\,m$ ،
فأوجد المسافة بين النقطتين A , B . ووضّح إجابتك.

المسافة بين النقطة $A.B = 60\,m$ لأن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة





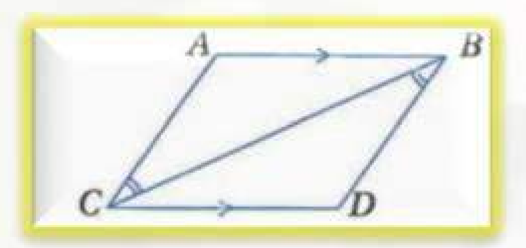



برهان: على الشكل المقابل:

4) المعطيات: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$\angle CBD \cong \angle BCA$

المطلوب: $\triangle CAB \cong \triangle BDC$





بما أن $AB \parallel CD$ إذن $\angle BCD \cong \angle ABC$

$\angle BCA \cong \angle CBD$ ، CB ضلع مشترك

$\Delta CAB \cong \Delta BDC$

بحسب مسلمة التطابق ASA



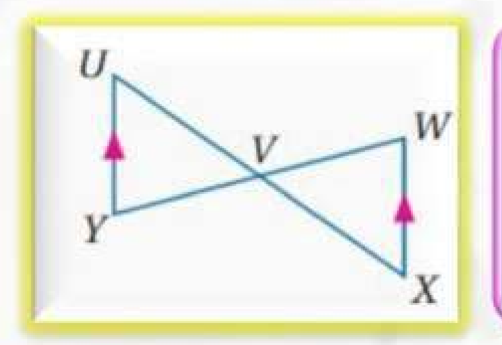


برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

5) **المعطيات:** V نقطة منتصف $\overline{WY}$

$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$

المطلوب: $\triangle UVY \cong \triangle XVW$





1) V نقطة منتصف $\overline{YW}$ ، $\overline{UY} \parallel \overline{XW}$ (معطيات)

2) $\overline{YV} \cong \overline{VW}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $\angle VWX \cong \angle VYU$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

4) $\angle VUY \cong \angle VXW$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

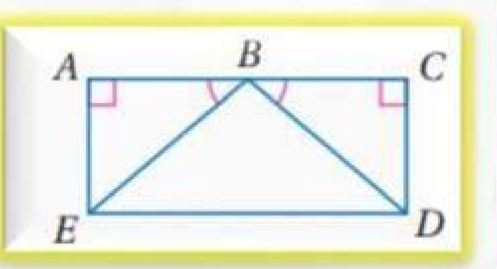
5) $\Delta UVY \cong \Delta XVW$ (حسب نظرية AAS)

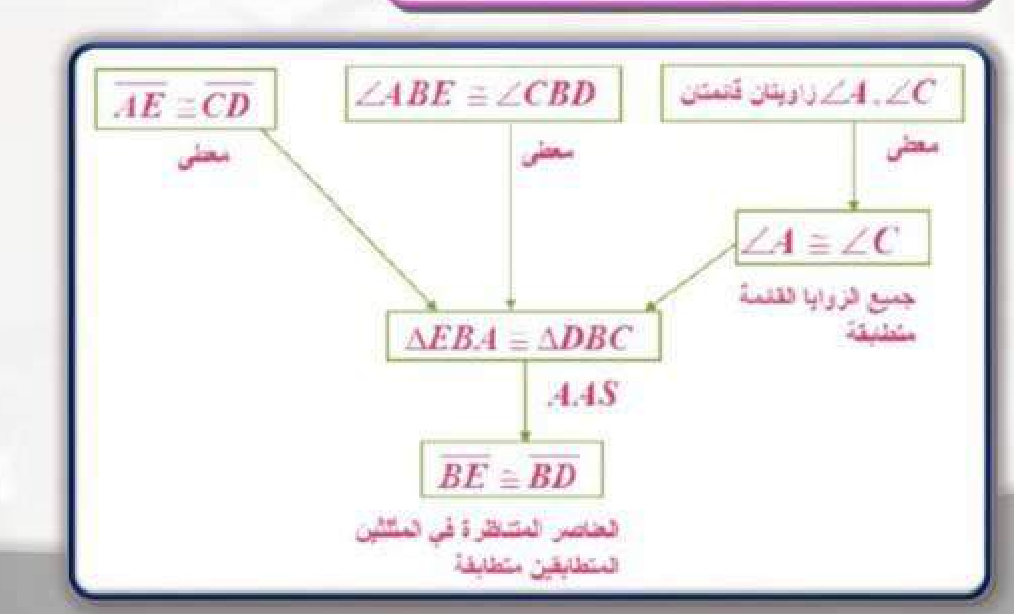
6) **برهان:** اكتب برهانًا تسلسليًا.

المعطيات: $\angle A, \angle C$ زاويتان قائمتان.

$\angle ABE \cong \angle CBD$, $\overline{AE} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\overline{BE} \cong \overline{BD}$







7) سباق زوارق: يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديفٍ في بحيرة، لكنهم غير متأكدين ممّا إذا كان طول البحيرة كافيًا لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حدّدوا رؤوس المثلثين المبينين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع $\triangle HJK$، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b

a) وضّح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة FG عبر البحيرة.



a) $\angle HJK \cong \angle KFG$ لان جميع الزوايا القوائم متطابقة و $\overline{JK} = \overline{KF}$

و $\angle HKJ \cong \angle FKG$ متقابلتان بالرأس وبحسب ASA فإن $\Delta HKJ \cong \Delta GFK$

لذا فإن $\overline{FG} = \overline{HJ}$ لان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة،

ولذلك يمكن قياس $\overline{HJ}$ لتقدير المسافة $\overline{FG}$ عبر البحيرة.

b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضّح إجابتك.

(b

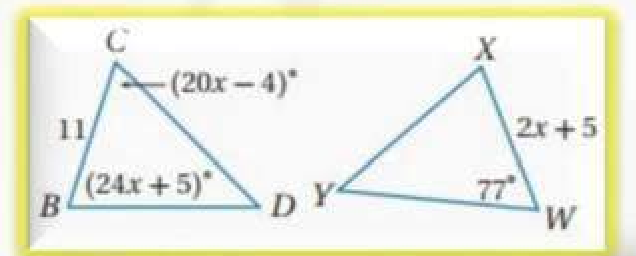
بما أن $\overline{FG} = \overline{HJ}$ إذن $\overline{FG} = 1350$ أي طول البحيرة= 1350 وهذه المسافة غير مطابقة للمسافة المطلوبة، إذن طول البحيرة غير كاف لإجراء السباق.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

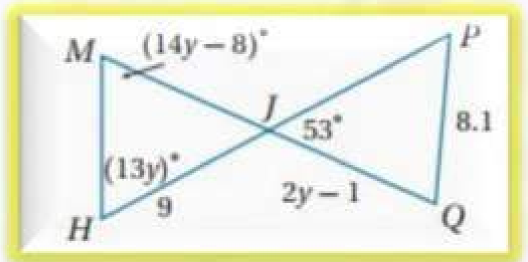


جبر، أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

8) $\triangle BCD \cong \triangle WXY$



9) $\triangle MHJ \cong \triangle PQJ$



الحل

$\because \Delta BCD \cong \Delta WXY$

$\therefore BC = WX$

$11 = 2x + 5$

$2x = 11 - 5$

$2x = 6$

$x = 3$

$\because \Delta MHJ \cong \Delta PQJ$

$\therefore HJ = QJ$

$9 = 2y - 1$

$2y = 9 + 1$

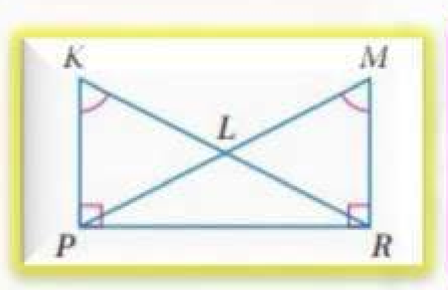
$y = 5$



برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين

10) المعطيات: $\angle K \cong \angle M$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\overline{MR} \perp \overline{PR}$

المطلوب: $\angle KPL \cong \angle MRL$



الحل

1) $\angle K \cong \angle M$ ، $\overline{KP} \perp \overline{PR}$ ، $\overline{MR} \perp \overline{PR}$ (معطيات)

2) $\angle KPR$ ، $\angle MRP$ قائمتان (تعريف التعامد)

3) $\angle KPR \cong \angle MRP$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{PR} \cong \overline{PR}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\Delta KPR \cong \Delta MRP$ (AAS)

6) $\overline{KP} \cong \overline{MR}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

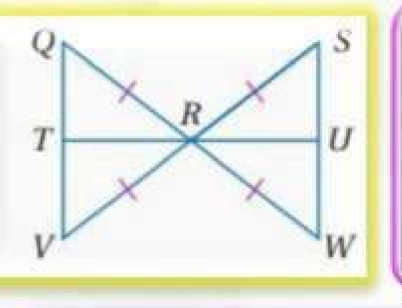
7) $\angle KLP \cong \angle MLR$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

8) $\Delta KLP \cong \Delta MLR$ (AAS)

9) $\angle KPL \cong \angle MRL$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

11) المعطيات: $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

المطلوب: $\overline{QT} \cong \overline{WU}$



1) $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$ (معطيات)

2) $\angle QRV \cong \angle SRW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\Delta VRQ \cong \Delta SRW$ (SAS)

4) $\angle VQR \cong \angle SWR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle QRT \cong \angle URW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

6) $\Delta URW \cong \Delta TRQ$ (ASA)

7) $\overline{QT} \cong \overline{WU}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)



12) **دراجات هوائية :** يشكّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كلٍّ من دعامتَي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها °68 مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكل دعامة سلسلة تشكل زاوية قياسها °44 مع أنبوب المقعد، فبيّنْ أن دعامتَي المقعد لهما الطول نفسه.





1) $m\angle ACB = 68^\circ, m\angle ADB = 68^\circ, m\angle CBA = 44^\circ, m\angle DBA = 44^\circ$ (معطيات)

2) $m\angle ACB = m\angle ADB, m\angle CBA = m\angle DBA$ (بالتعويض)

3) $m\angle ACB \cong m\angle ADB, m\angle CBA \cong m\angle DBA$ (تعريف تطابق الزوايا)

4) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\Delta ADB \cong \Delta ACB$ (AAS)

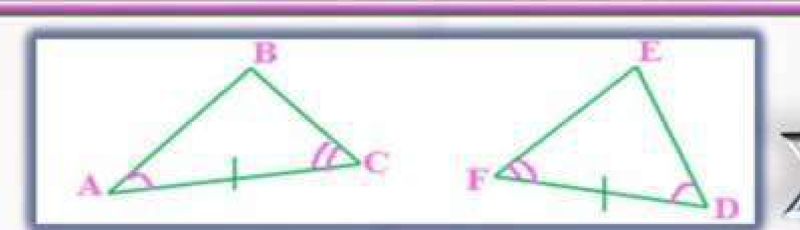
6) $\overline{AC} \cong \overline{AD}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)





13) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وسمِّهما.

الحل



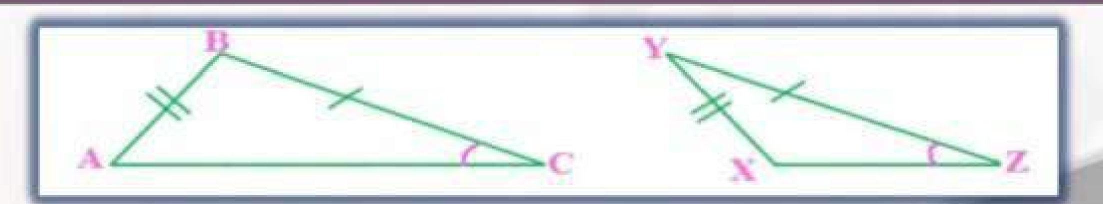
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

حسب مسلمة ASA

14) اكتشف الخطأ: يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيُّهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

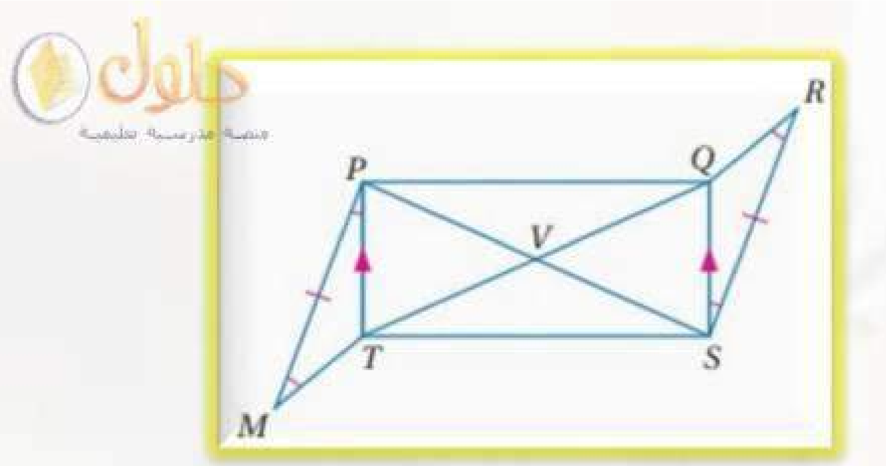
عمر إجابتة صحيحة، لأن حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA وهي ليست من الحالات التي تستعمل لاثبات التطابق

15) تبرير: أوجد مثالًا مضادًا يوضّح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين.



في المثلثين أدناه نلاحظ أن $AB \cong XY$، $\angle Z \cong \angle C$، $BC \cong YZ$

لكن $\Delta ABC \ncong \Delta XYZ$



16) **تحدٍّ:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانًا تسلسليًا لإثبات أن $\triangle PVQ \cong \triangle SVT$.

الحل

$\angle MPT \cong \angle PMT \cong \angle QRS \cong \angle RSQ$
معطى

$\overline{PM} \cong \overline{RS}$
معطى

$\triangle PMT \cong \triangle SRQ$
ASA

$\overline{PT} \parallel \overline{QS}$
معطى

$\angle TPS \cong \angle PSQ$
الزاويتان المتبادلتان داخليا متطابقتان

$\angle TVP \cong \angle SVQ$
الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان

$\overline{PT} \cong \overline{QS}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

$\triangle PVT \cong \triangle SVQ$
AAS

$\overline{VQ} \cong \overline{VT}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

$\overline{PV} \cong \overline{SV}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة

$\angle PVQ \cong \angle SVT$
الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان

$\triangle PVQ \cong \triangle SVT$
SAS



17) **اكتب:** لخّص الطرائق الواردة في الدروس من 3-3 إلى 3-5؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحًا متى تُستعمل كل طريقة.



الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاث في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.
ASA	عندما يتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر.

فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

والآن:

- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين.
- أستعمل خصائص المثلثات المتطابقة الأضلاع.

المفردات:

الساقان
legs of an isosceles triangle

زاوية الرأس
vertex angle

زاويتا القاعدة
base angles

www.obeikaneducation.com

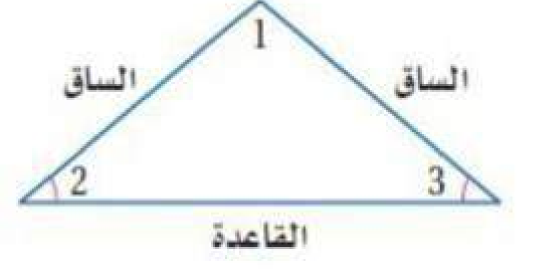
لماذا؟



يوجد للسكة الحديدية للعبة القاطرة السريعة في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها. والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة مثلثات متطابقة الضلعين.

خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكّر أن المثلثات المتطابقة الضلعين لها على الأقل ضلعان متطابقان، وأن لعناصره أسماءً خاصة.

يُسمّى الضلعان المتطابقان **بالساقين**، وتُسمّى الزاوية التي ضلعاها الساقان **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدةَ. والزاويتان المكونتان من القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتي القاعدة**.



ففي الشكل المجاور، $\angle 1$ هي زاوية الرأس، وزاويتا القاعدة هما $\angle 3 , \angle 2$.





٣-٦ المثلثات المتطابقة الضلعين
Isosceles Triangles

نظريات — المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى مطويتك

3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

مثال: إذا كان $\overline{BC} \cong \overline{AC}$، فإن $\angle 2 \cong \angle 1$.

3.11 عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال: إذا كان $\angle 2 \cong \angle 1$ ، فإن $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

مثال 1 القطع المستقيمة المتطابقة والزوايا المتطابقة

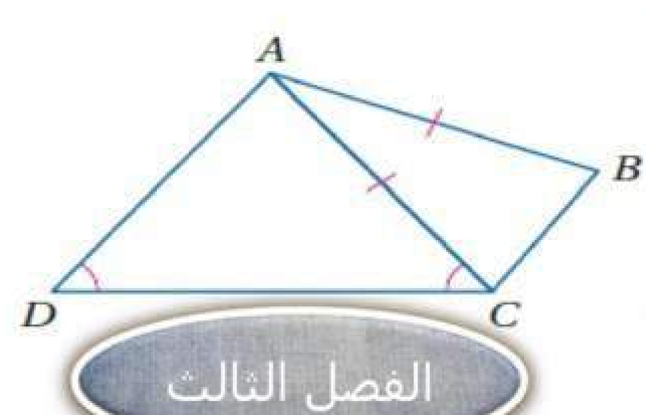
a) سمِّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$ تقابل $\overline{AB}$، $\angle B$ تقابل $\overline{AC}$ ؛

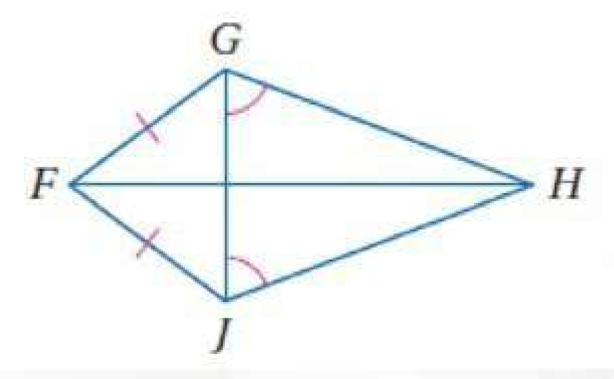
لذا فإن $\angle ACB \cong \angle B$.

b) سمِّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\overline{AD}$ تقابل $\angle ACD$، $\overline{AC}$ تقابل $\angle D$ ، لذا فإن $\overline{AD} \cong \overline{AC}$.







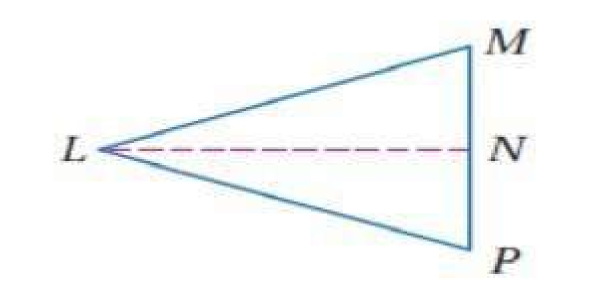
1A) سمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

1B) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle FGJ, \angle FJG$ (1A

$\overline{GH}, \overline{JH}$ (1B

البرهان نظرية المثلث المتطابق الضلعين



المعطيات: في $\triangle LMP$ ، $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن: $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

العبارات	المبرّرات
1) افترض أن N نقطة منتصف $\overline{MP}$.	1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.
2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$.	2) كل نقطتين تحددان مستقيمًا.
3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$	3) نظرية نقطة المنتصف.
4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$	4) خاصية الانعكاس في التطابق.
5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$	5) معطى
6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$	6) مسلّمة التطابق بثلاثة أضلاع.
7) $\angle M \cong \angle P$	7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

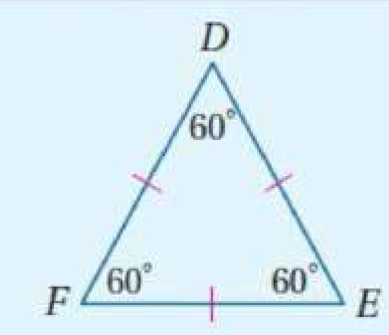
خصائص المثلث المتطابق الأضلاع: تقود نظرية المثلث المتطابق الضلعين إلى نتيجتين حول زوايا المثلث المتطابق الأضلاع.



نتيجتان

المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى مطويتك



3.3 يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

مثال: إذا كان $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ، فإن

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

3.4 قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع $60°$.

مثال: إذا كان $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ، فإن

$.m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60°$

D, E, F, 60°, 60°, 60°

مراجعة المفردات

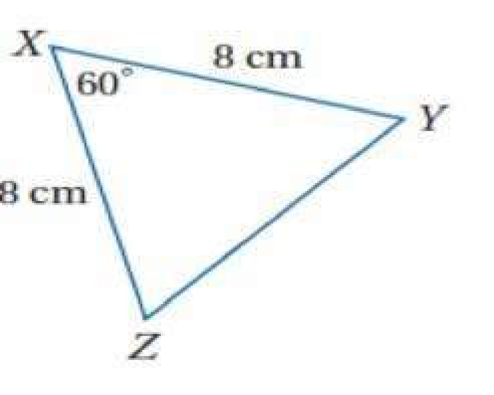
المثلث المتطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.



مثال 2 إيجاد القياسات غير المعلومة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

a) $m\angle Y$



بما أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$, $XY = XZ$. وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة Z, Y متطابقتين؛ لذا فإن $m\angle Z = m\angle Y$. استعمل نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد $m\angle Y$.

$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180°$	نظرية مجموع زوايا المثلث
$60° + m\angle Y + m\angle Y = 180°$	$m\angle X = 60°, m\angle Z = m\angle Y$
$60° + 2(m\angle Y) = 180°$	بالتبسيط
$2(m\angle Y) = 120°$	بطرح 60 من كل طرف
$m\angle Y = 60°$	بقسمة كل طرف على 2

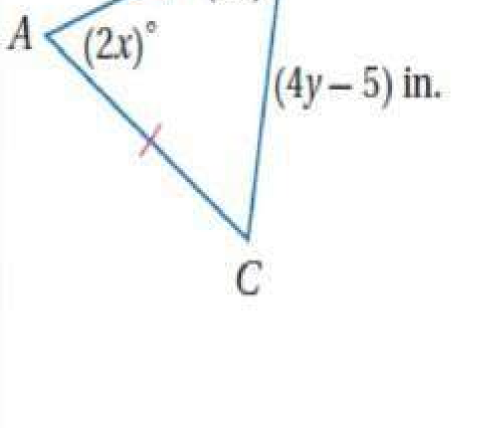
b) YZ

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن $m\angle Z = 60°$. وبما أن $m\angle X = 60°$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث 60° ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا $XY = XZ = ZY$. وبما أن $XY = 8\,cm$ ، فإن $YZ = 8\,cm$



مثال 3 إيجاد القيم المجهولة

جبر: أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور. بما أن $\angle B = \angle A$ فإن $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ باستعمال عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل زاوية فيه تساوي $60°$؛ لذا فإن $2x = 60 , x = 30$.



وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، فإن جميع الأضلاع متطابقة، وأطوالها متساوية.

$AB = BC$	تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
$3 = 4y - 5$	بالتعويض
$8 = 4y$	بإضافة 5 إلى كل من الطرفين
$2 = y$	بقسمة كل طرف على 4

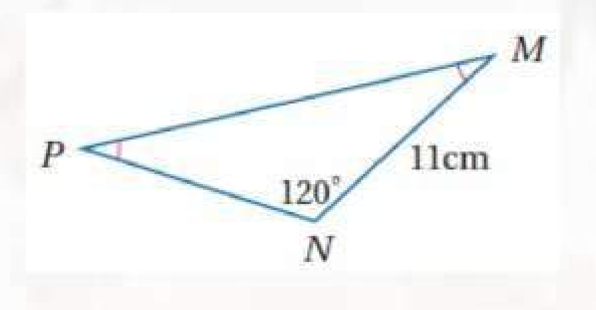
إرشادات للدراسة

المثلثات المتطابقة الضلعين

كما اكتشفت في المثال 2، أي مثلث متطابق الضلعين فيه الزاوية °60 يكون مثلثًا متطابق الأضلاع.

2A) $m\angle M$

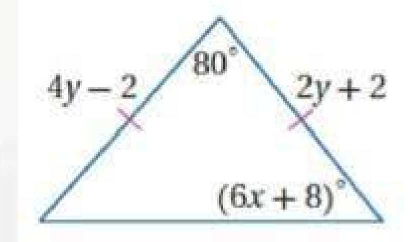
30°



2B) PN

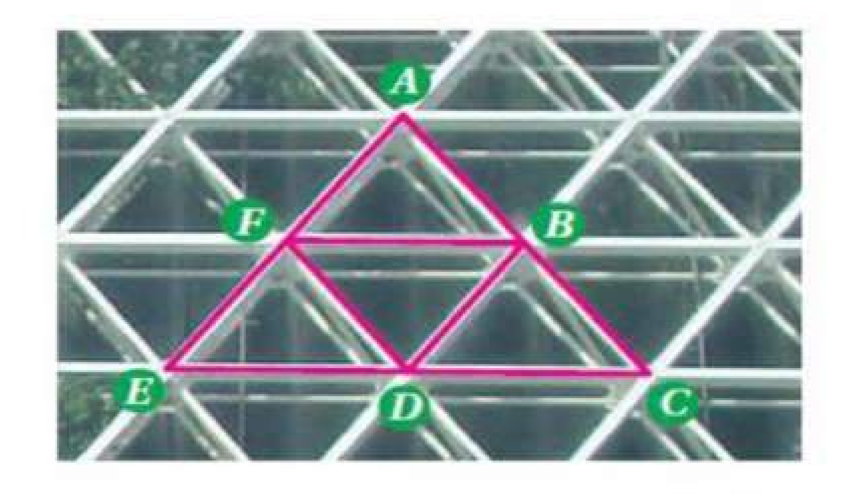
11 cm

3) أوجد قيمة كل من المتغيرين في الشكل المجاور .



$x = 7, y = 2$

مثال 4 من واقع الحياة **تطبيق تطابق المثلثات**



مباني: انظر إلى الصورة المجاورة. $\triangle ACE$ مثلث متطابق الأضلاع. F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$. برهن أن $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

المعطيات: $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، F نقطة منتصف $\overline{AE}$، و D نقطة منتصف $\overline{EC}$،و B نقطة منتصف $\overline{CA}$

المطلوب: إثبات أن: $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.

البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.	1) معطى
2) F نقطة منتصف $\overline{AE}$، D نقطة منتصف $\overline{EC}$، B نقطة منتصف $\overline{CA}$.	2) معطى
3) $m\angle A = 60°, m\angle C = 60°, m\angle E = 60°$	3) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$
4) $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$	4) تعريف التطابق والتعويض
5) $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CA}$	5) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع
6) $AE = EC = CA$	6) تعريف التطابق

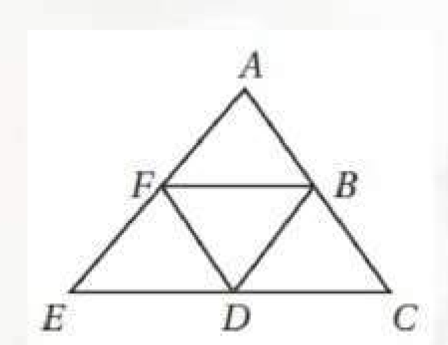


7) $\overline{AF} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{DC}, \overline{CB} \cong \overline{BA}$	7) نظرية نقطة المنتصف
8) $AF = FE, ED = DC, CB = BA$	8) تعريف التطابق
9) $AF + FE = AE, ED + DC = EC, CB + BA = CA$	9) مسلّمة جمع القطع المستقيمة
10) $AF + AF = AE, FE + FE = AE, ED + ED = EC, DC + DC = EC, CB + CB = CA, BA + BA = CA$	10) بالتعويض
11) $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = EC, 2DC = EC, 2CB = CA, 2BA = CA$	11) خاصية الجمع
12) $2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = AE, 2DC = AE, 2CB = AE, 2BA = AE$	12) خاصية التعويض
13) $2AF = 2ED = 2CB, 2FE = 2DC = 2BA$	13) خاصية التعدي
14) $AF = ED = CB, FE = DC = BA$	14) خاصية القسمة
15) $\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$	15) تعريف التطابق
16) $\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$	16) مسلّمة SAS
17) $\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$	17) العناصر المتناظرة متطابقة.
18) $\triangle FBD$ متطابق الأضلاع.	18) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع



4) إذا علمت أن $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع، فيه $\overline{FB} \parallel \overline{EC}, \overline{FD} \parallel \overline{BC}, \overline{BD} \parallel \overline{EF}$ ، D نقطة منتصف $\overline{EC}$،

فأثبت أن $\triangle FED \cong \triangle BDC$.



4) **المعطيات:** $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع فيه $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$

$\overline{FD} \parallel \overline{BC}, \overline{BD} \parallel \overline{EF}$

والنقطة D نقطة منتصف $\overline{EC}$.

المطلوب: $\triangle FED \cong \triangle BDC$

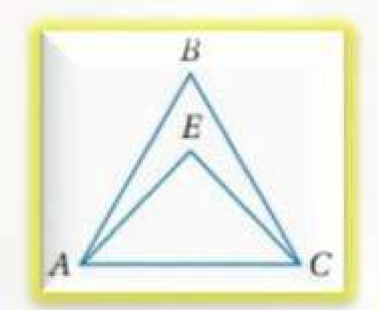
البرهان:

العبارات	المبررات
1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$. D نقطة منتصف $\overline{EC}$.	1) معطيات
2) $m\angle E = 60°, m\angle C = 60°$	2) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60°$
3) $m\angle E = m\angle C$	3) خاصية التعدي للتطابق
4) $\angle E \cong \angle C$	4) تعريف التطابق
5) $\overline{ED} \cong \overline{DC}$	5) نظرية نقطة المنتصف
6) $\angle CBD \cong \angle BDF, \angle EFD \cong \angle BDF$	6) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخليًا
7) $\angle CBD \cong \angle EFD$	7) خاصية التعدي للتطابق
8) $\triangle FED \cong \triangle BDC$	8) AAS









باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

1) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

الحل

1) $\angle BAC$, $\angle BCA$



2) إذا كان $\angle EAC \cong \angle ECA$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

2) $\overline{EA}$, $\overline{EC}$



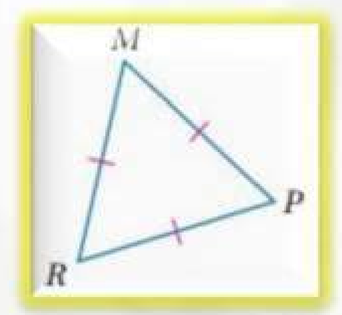


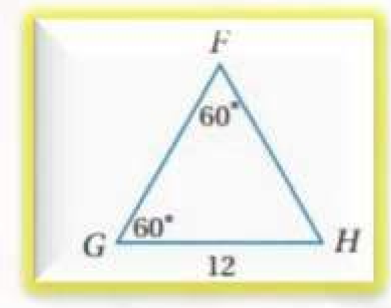


أوجد كلا من القياسين الآتيين

$m\angle MRP$ (4

FH (3







حسب نتيجة 3.4
قياس كل زاوية 60في المثلث
المتطابق الاضاع = 60
$\angle MRP = 60$

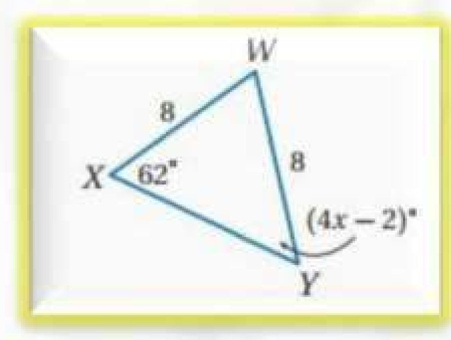


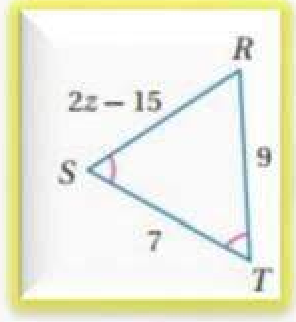
$\because \angle F = \angle G$
$\therefore GH = FH$
$FH = 12$





جبر :أو جد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين :







$\because WY = XY$

$\angle WYX = \angle WXY$

$4x - 2 = 62$

$4x = 64$

$x = 16$

$\because \angle S = \angle T$

$RT = RS$

$9 = 2z - 15$

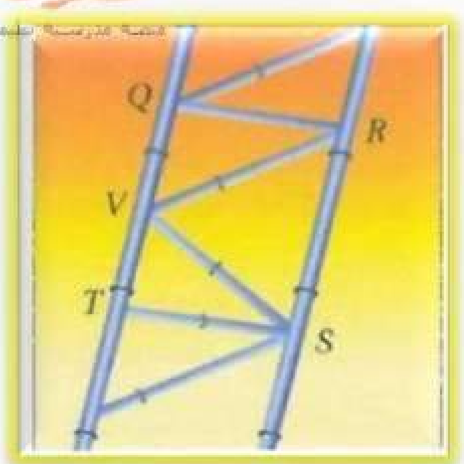
$2z = 9 + 15$

$2z = 24$

$z = 12$







7) **القاطرة السريعة :** الشكل المجاور يظهر جزءًا من سكة القاطرة السريعة المبينة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.

a) إذا كان $\overline{QR}$ ، $\overline{ST}$ عموديّان على $\overline{QT}$، وَ $\triangle RVS$ متطابق الضلعين قاعدته $\overline{RS}$، $\overline{SR} \parallel \overline{QT}$، فأثبت أن $\triangle RQV \cong \triangle STV$.



a) **المعطيات:** $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$،

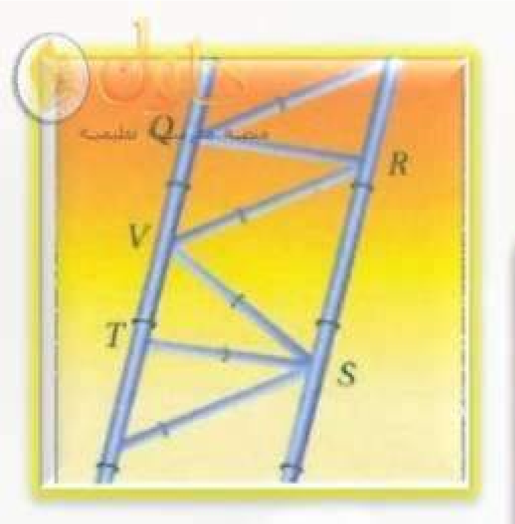
المطلوب: $\Delta RQV \cong \Delta STV$

البرهان:



- $\overline{QR}$و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$،و ΔVSR متطابق الضلعين و قاعدته $\overline{SR}$ و $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$ (معطى)
- $\angle RQV$, $\angle STV$ زوايا قائمة
- $\angle RQV \cong \angle STV$ تعريف الزاوية القائمة
- $\overline{VR} \cong \overline{VS}$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle VSR \cong \angle VRS$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle TVS \cong \angle VRS$, $\angle QVR \cong \angle VRS$
- $\angle TVS \cong \angle QVR$
- $\angle RQV \cong \angle STV$ حسب مسلمة AAS





b) إذا كان $QR = 2\text{ m}$ ، $VR = 2.5\text{ m}$، فأوجد البعد بين المستقيمين $\overleftrightarrow{ST}$ وَ $\overleftrightarrow{QR}$. برِّر إجابتك.

الحل

b) من نظرية فيثاغورث $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5m$

وحيث أن الاضلاع المتناظرة في المثلثين المتطابقين يكونوا متطابقين

إذن $VT = 1.5m$

$\because QV + VT = QT$

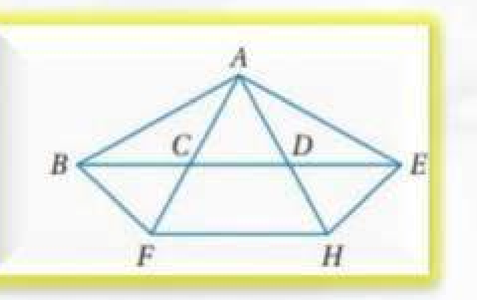
$1.5 + 1.5 = QT$

$QT = 3m$



المثال ١

باستعمال الشكل المجاور اجب عن الاسئلة الاتية



8) إذا كان $\overline{AB} \cong \overline{AE}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

9) إذا كانت $\angle ABF \cong \angle AFB$ ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

10) إذا كانت $\overline{CA} \cong \overline{DA}$ ، فسمّ زاويتين متطابقتين.

11) إذا كانت $\angle DAE \cong \angle DEA$، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين.



8) $\angle ABE$, $\angle AEB$

9) AB , AF

10) $\angle ACD$, $\angle ADC$

11) AD , DE



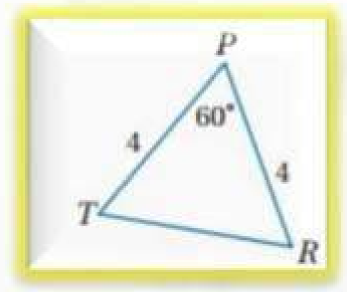


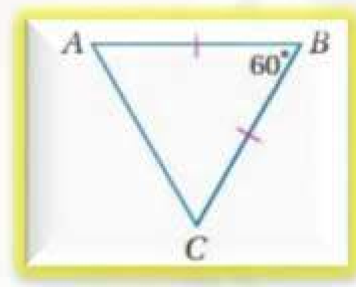
أوجد كلًّا من القياسين الآتيين:

TR (13

$m\angle BAC$ (12









نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\because AB = BC$

$\therefore \angle A = \angle C$

$\angle A = \angle C = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

$m\angle BAC = 60^\circ$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\because PR = PT$

$\therefore \angle R = \angle T$

$\therefore \angle R = \angle T = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

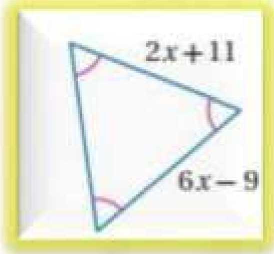
$PR = PT = TR$

$TR = 4cm$





جبر، أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:





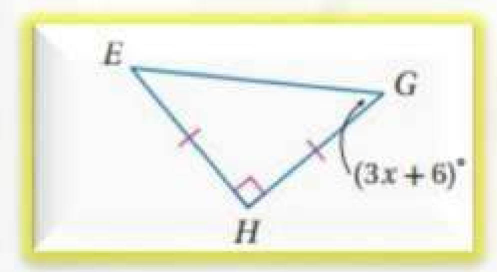
بما أن جميع زوايا المثلث متطابقة إذن الأضلع متطابقة حسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

$6x - 9 = 2x + 11$

$6x - 2x = 11 + 9$

$4x = 20$

$x = 5$



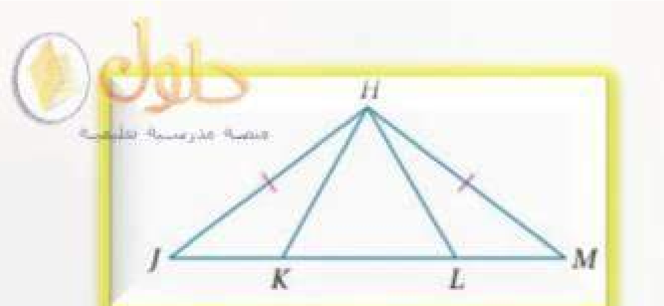
$\because HG = HE$

$\therefore \angle E = \angle G = 45^\circ$

$3x + 6 = 45$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

$3x = 39$

$x = 13$





برهان، اكتب برهانًا حرًّا.

16) **المعطيات،** $\triangle HJM$ متطابق الضلعين، $\triangle HKL$ متطابق الأضلاع.

المطلوب إثبات أن، $\angle JHK \cong \angle MHL$

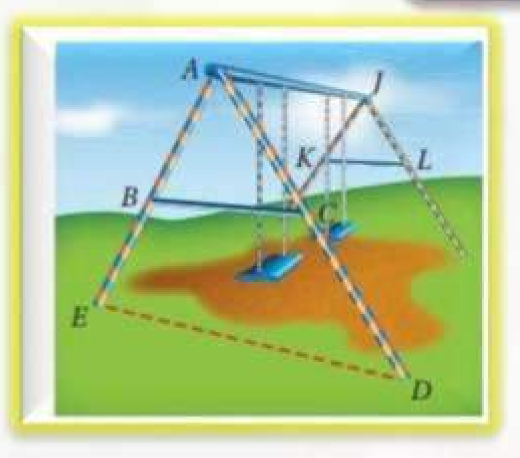


بما أن $HM = HJ$ إذن $\angle HMJ = \angle HJM$

وبما أن ΔHKL متطابق الأضلاع إذن $\angle HKJ = \angle HLM$ لأن $\angle HKL = \angle HLK$ من تطابق المثلث

إذن $\Delta HKJ \cong \Delta HLM$ حسب نظرية AAS.

ولان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فان $\angle MHL = \angle JHK$



17) **حدائق،** اصطحب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي، فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل مجموعتين من المثلثات، وأن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ولكن $\overline{BC} \ncong \overline{AB}$.



a) إذا قدّر خالد أن $m\angle BAC = 50°$، فما قيمة $m\angle ABC$ وفقا لهذا التقدير؟ وضّح إجابتك.

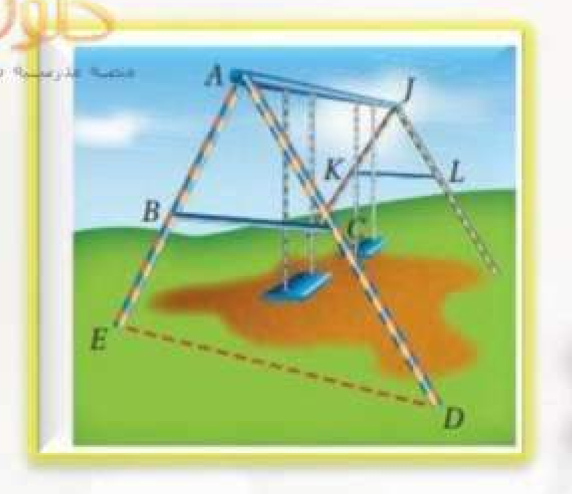


بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن $\angle ABC = \angle ACB$

حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: $180° - 50 = \angle ABC + \angle ACB$

$130° = \angle ABC + \angle ABC$ (خاصية التعويض)

$65° = \angle ABC$



b) إذا كان $\overline{CD} \cong \overline{BE}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الضلعين.



العبارات	المبررات
$AB \cong AC$, $BE \cong CD$	معطيات
$AB = AC$, $BE = CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$AB + BE = AE$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AC + CD = AD$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AB + BE = AC + CD$	خاصية الجمع للمساواة
$AE = AD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
مثلث AED متطابق الضلعين	تعريف المثلث المتطابق الضلعين

c) إذا كان $\overline{AD} \cong \overline{ED}$ ، $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$، فبيّن أن $\triangle AED$ متطابق الأضلاع.

1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ ، $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ، $\overline{ED} \cong \overline{AD}$ (معطيات)

2) $\angle ABC \cong \angle ACB$ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

3) $\angle ABC = \angle ACB$ (تعريف تطابق الزوايا)

4) $\angle ABC \cong \angle AED$ ، $\angle ACB \cong \angle ADE$ (زوايا متناظرة)

5) $\angle ABC = \angle AED$ ، $\angle ACB = \angle ADE$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $m\angle AED = m\angle ACB$ (بالتعويض)

7) $m\angle AED = m\angle ADE$ (بالتعويض)

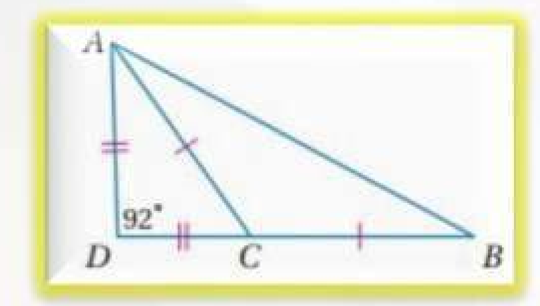
8) $\angle AED \cong \angle ADE$ (تعريف تطابق الزوايا)

9) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

10) $\triangle AED$ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)



أوجد كلا من القياسات الآتية:





18) $m\angle CAD$

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle CAD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle CAD = 44^\circ$

19) $m\angle ACD$

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle ACD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle ACD = 44^\circ$

20) $m\angle ACB$

$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$

$\angle ACB = 180^\circ - 44^\circ$

$\angle ACB = 136^\circ$

21) $m\angle ABC$

$\because AC = CB$

$\angle CAB = \angle ABC$

$2\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$

$2\angle ABC = 180^\circ - 136^\circ$

$\angle ABC = 22^\circ$



برهان :اكتب برهانا ذا عمودي لكل نتيجة او نظرية مما يأتي:

22) النتيجة 3.3



الحالة الاولى:

1) ΔABC متطابق الاضلاع (معطى)

2) $AB \cong AC \cong BC$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الضلعين)

4) ΔABC متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

الحالة الاولى:

1) ΔABC متطابق الزوايا (معطى)

2) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $AB \cong AC \cong BC$ (اذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين)

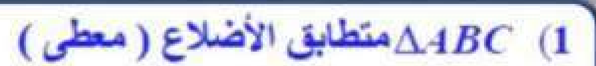
4) ΔABC متطابق الاضلاع (تعريف المثلث المتطابق الاضلاع)



برهان :اكتب برهانا ذا عمودين لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

23) النتيجة 3.4

الحل



1) ΔABC متطابق الأضلاع (معطى)

2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

4) $m\angle A = m\angle B = m\angle C$ (تعريف التطابق)

5) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^{\circ}$ (نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

6) $m\angle A = 60^{\circ}$ (خاصية القسمة)

7) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^{\circ}$ (بالتعويض)



برهان :اكتب برهانا ذا عمودي لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

24) النظرية 3.11



1)أفترض أن BD ينصف ∠ ABC (مسلمة المنقلة)

2) ∠ ABD ≅∠ CBD ∠ (تعريف منصف الزاوية)

3) ∠ A ≅∠ C ∠ (معطى)

4) BD ≅ BD (خاصية الانعكاس)

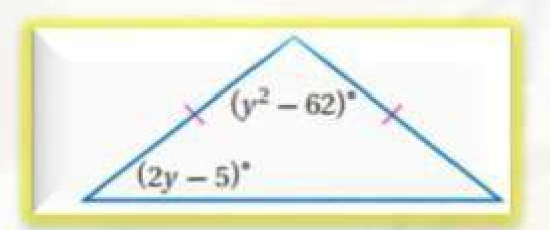
5) Δ ABD≅ Δ CBD (AAS)

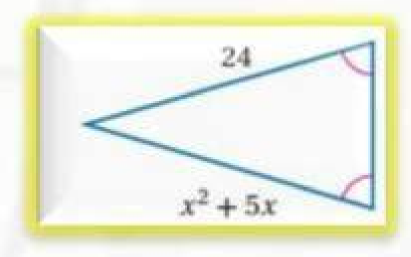
6) CB ≅ AB

(العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)



أوجد قيمة المتغير في كلٍّ من السؤالين الآتيين:







$x^2 + 5x = 24$

$x^2 + 5x - 24 = 0$

$(x - 3)(x + 8) = 0$

$x = 3$

$x = -8$ ✗

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$(Y^2 - 62) + 2(2Y - 5) = 180$

$Y^2 - 62 + 4Y - 10 = 180$

$Y^2 + 4Y - 62 - 190 = 0$

$Y^2 + 4Y - 252 = 0$

$(Y + 18)(Y - 14) = 0$

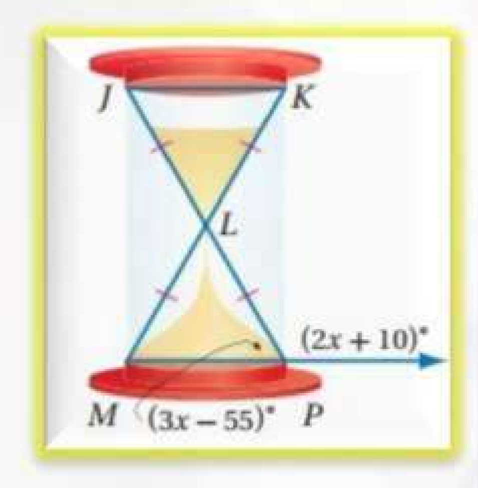
$Y = -18$

$Y = 14$

$Y = -18$ ✗



الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



27) $m\angle LPM$



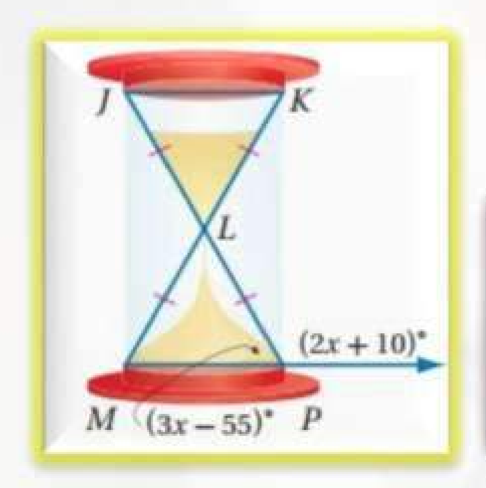
$$(2x+10)+(3x-55)=180^\circ$$
$$5x-45=180$$
$$5x=180+45$$ زاويتان متجاورتان على مستقيم
$$x=45$$
$$\angle LPM=(3x-55)=3\times 45-55$$
$$\angle LPM=80^\circ$$

28) 

$$\because LP=LM$$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين
$$\angle LPM=\angle LMP=80^\circ$$



الساعات الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلًّا من القياسات الآتية:



29) $m\angle JLK$

الحل

$\angle MLP = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle MLP = 20^\circ$

$\angle MLP = \angle JLK = 20^\circ$ زاويتان متقابلتان بالرأس

30) $m\angle JKL$

$\angle JKL + \angle KJL = 180^\circ - 20^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle JKL + \angle KJL = 160^\circ$

$\because LK = JL$

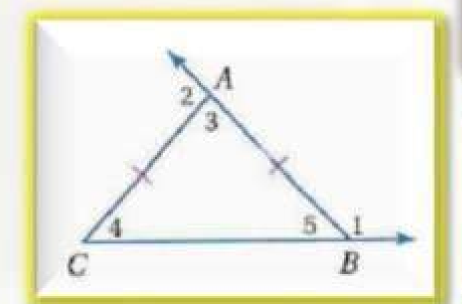
$\therefore \angle JKL = \angle KJL$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$2\angle JKL = 160^\circ$

$\angle JKL = 80^\circ$

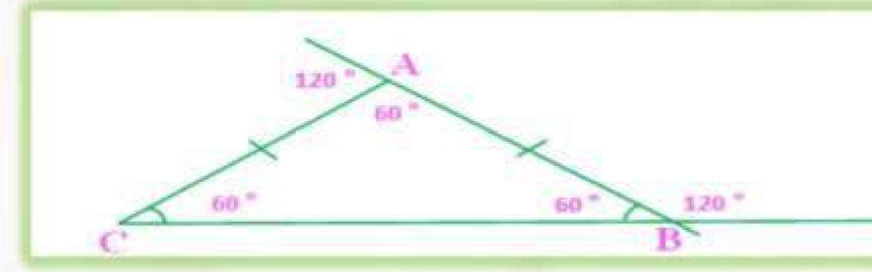


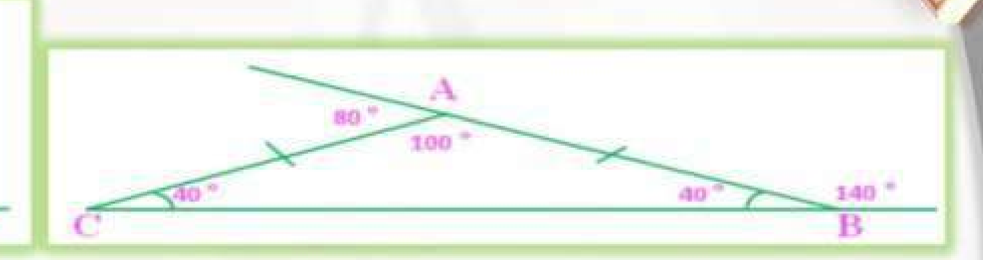
31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا عُلم قياس زاوية خارجية له.

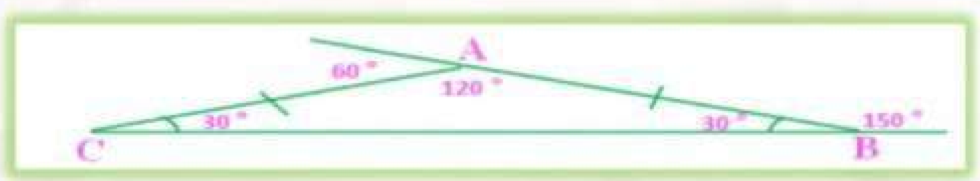


a) **هندسيًا:** استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين. ومُدّ أحد ضلعَي زاوية الرأس ومدّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

الحل





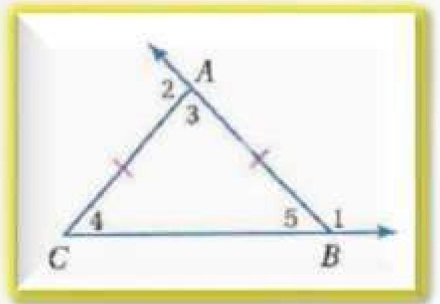


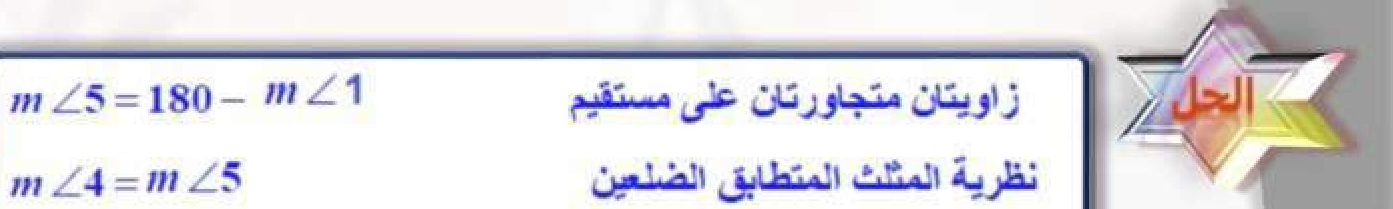
b) **جدوليًا:** استعمل المنقلة لإيجاد $m\angle 1$ لكل مثلث وسجّله في جدول. واستعمل $m\angle 1$ لحساب قياسات $\angle 5$, $\angle 4$, $\angle 3$، ثم أوجد $m\angle 2$ وسجّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتّب نتائجك في جدولين.

$m\angle 1$	$m\angle 3$	$m\angle 4$	$m\angle 5$
١٤٠	١٠٠	٤٠	٤٠
١٢٠	٦٠	٦٠	٦٠
١٥٠	١٢٠	٣٠	٣٠

$m\angle 2$	$m\angle 3$	$m\angle 4$	$m\angle 5$
٨٠	١٠٠	٤٠	٤٠
١٢٠	٦٠	٦٠	٦٠
٦٠	١٢٠	٣٠	٣٠



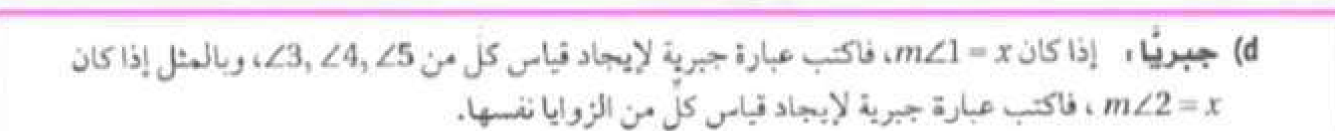




c) **لفظيًا،** وضّح كيف استعملت $m\angle 1$ لإيجاد قياسات $\angle 5, \angle 4, \angle 3$. ثم وضّح كيف استعملت $m\angle 2$ لإيجاد هذه القياسات نفسها.

الحل

زاويتان متجاورتان على مستقيم	$m\angle 5 = 180 - m\angle 1$
نظرية المثلث المتطابق الضلعين	$m\angle 4 = m\angle 5$
نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث	$m\angle 3 = 180 - (m\angle 4 + m\angle 5)$



d) **جبريًا،** إذا كان $m\angle 1 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍ من $\angle 5, \angle 4, \angle 3$، وبالمثل إذا كان $m\angle 2 = x$، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كلٍ من الزوايا نفسها.

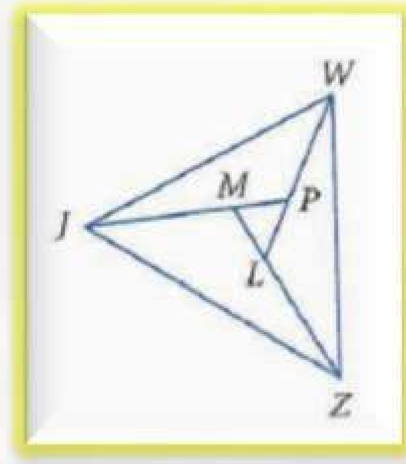
$$m\angle 5 = 180 - x$$

$$m\angle 4 = 180 - x$$

$$m\angle 3 = 180 - 2(180 - x) = 2x - 180$$







32) **تحدٍ:** في الشكل المجاور إذا كان ΔWJZ متطابق الأضلاع، $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$.



نعلم أن ΔWJZ متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا، فإن $\angle ZWJ \cong \angle WJZ \cong \angle JZW$ وبحسب تعريف تطابق الزوايا

$m\angle ZWJ = m\angle WJZ = m\angle JZW$

وبما أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ فإن:

$m\angle ZWJ = m\angle WJZ = m\angle JZW$

وبما أن $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ فإن:

$m\angle ZWP = m\angle WJM = m\angle JZL$

ومن تعريف تطابق الزوايا وباستعمال مسلمة جمع الزوايا ينتج أن:

$m\angle ZWJ = m\angle ZWP + m\angle PWJ$.

$m\angle WJZ = m\angle WJM + m\angle MJZ$.

$m\angle JZW = m\angle JZL + m\angle LZW$

وبالتعويض ينتج أن:

$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle WJM + m\angle MJZ = m\angle JZL + m\angle LZW$

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:

$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle ZWP + m\angle PJZ = m\angle ZWP + m\angle LZW$

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن:

$m\angle PWJ = m\angle PJZ = m\angle LZW$. ومن تعريف التطابق ينتج أن $\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW$. وبحسب مسلمة ASA ينتج أن $\Delta WZL \cong \Delta ZJM \cong \Delta JWP$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$



تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارتين الآتيتين صحيحة أحيانًا أو دائمًا أو غير صحيحة أبدًا. ووضّح إجابتك:

33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عددا صحيحًا، فإن قياس كلٍ من زاويتي القاعدة عدد صحيح.



أحيانا، تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عددا زوجيا.

34) إذا كان قياس كلٍ من زاويتي القاعدة عددًا صحيحًا، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

غير صحيحة أبدا، لان قياس زاوية الرأس يساوي (قياس إحدى زاويتي القاعدة)2 – 180)، إذا كان قياس احدي زاويتي القاعدة عدد صحيح فان مجموع قياس زاويتي القاعدة يكون عددا زوجيا وبالتالي فان قياس زاوية الرأس سيكون زوجيا ايضا

35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثًا متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضّح السبب.

لا يمكن أن يحوي المثلث أكثر من زاوية منفرجة، لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.

36) **اكتب:** وضّح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 وزاويتا القاعدة لهما نفس القياس، لذا فان قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180 ناقصا مثلي قياس إحدى زاويتي القاعدة

فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

والآن:

- أرسم مثلثات، وأحدد مواقعها لاستعمالها في البرهان الإحداثي.
- أكتب برهانًا إحداثيًا.

المفردات:

البرهان الإحداثي
coordinate proof

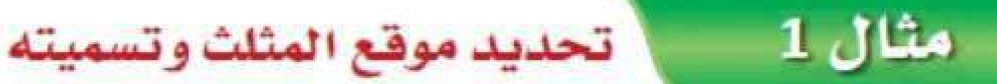
لماذا؟



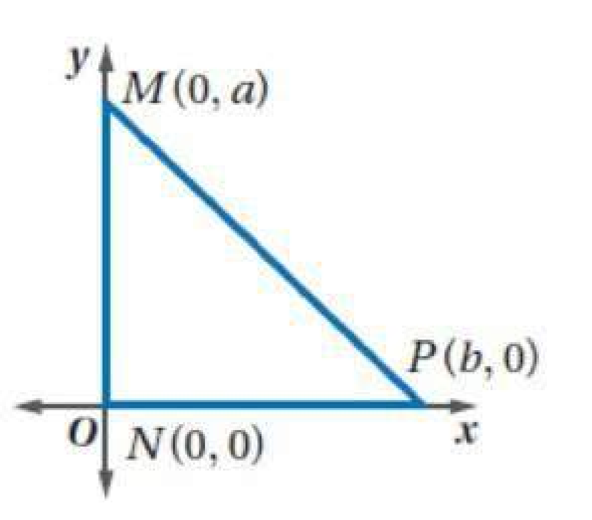
يستقبل نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) البث من الأقمار الصناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

موقع المثلث وتسميته: كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس شكل ما في مستوى إحداثي يمكنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل **البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.





مثال 1 تحديد موقع المثلث وتسميته



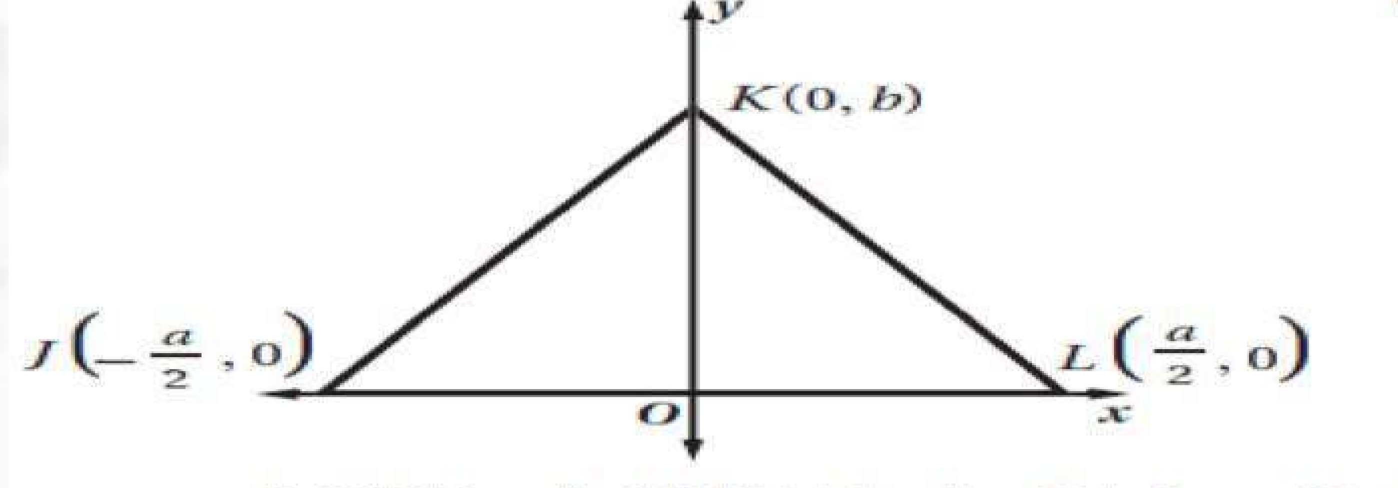
ارسم المثلث القائم MNP في المستوى الإحداثي، وسمّ رؤوسه على أن يكون طول الضلع $\overline{MN}$ يساوي **a** وحدة، وطول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة.

- يحدد طول الضلع الذي يقع على أحد المحورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعي القائمة على المحورين x, y.
- اجعل زاوية المثلث القائمة $\angle N$ على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحورين x, y .
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم M على المحور y، وبما أن طول $\overline{MN}$ يساوي a وحدة، فإن إحداثيها x يساوي صفرًا، وإحداثيها y يساوي a.
- ارسم P على المحور x، وبما أن طول $\overline{NP}$ يساوي b وحدة، فإن إحداثيها y يساوي صفرًا، وإحداثيها x يساوي b.



1) ارسم المثلث JKL المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسمِّ رؤوسه على أن يكون طول قاعدته $\overline{JL}$ يساوي a وحدة، ويكون ارتفاعه b وحدة، ويقع الرأس K على المحور y.

(1



3) **المعطيات:** المثلثان $\triangle ABX$ و $\triangle CDX$

المطلوب: $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$$



مفهوم أساسي رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

أضف إلى مطويتك

الخطوة 1: اجعل نقطة الأصل رأسًا أو مركزًا للمثلث.

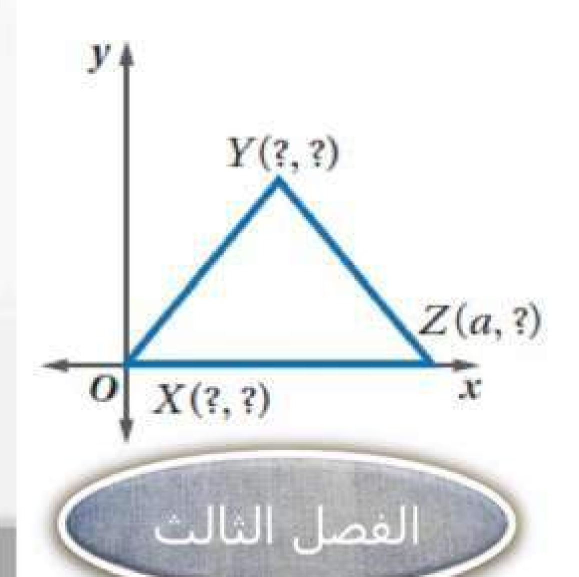
الخطوة 2: ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

الخطوة 3: ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

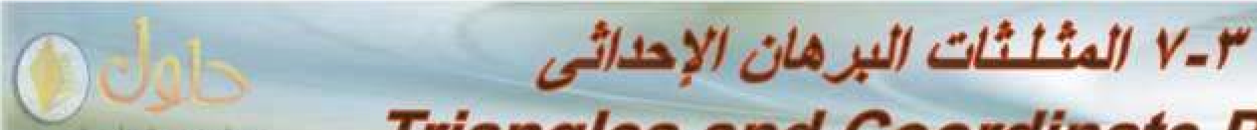
الخطوة 4: استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

مثال 2 إيجاد الإحداثيات المجهولة

أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث XYZ المتطابق الضلعين.

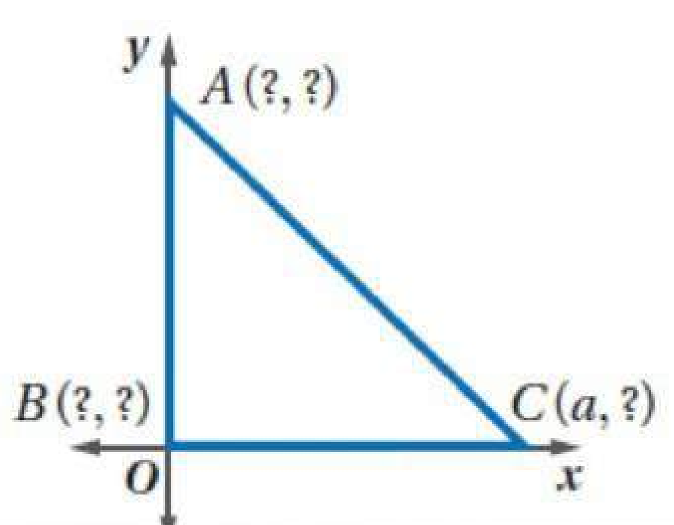


بما أن الرأس X يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0, 0)$، ولأن الرأس Z يقع على المحور x، فإن الإحداثي y يساوي صفرًا، فتكون إحداثيات الرأس Z هي $(a, 0)$، وبما أن $\triangle XYZ$ متطابق الضلعين، فإن الإحداثي x للنقطة Y يقع في منتصف المسافة بين a, 0 ويكون $\frac{a}{2}$. وأما الإحداثي y للنقطة Y فلا يمكننا إيجاده بدلالة a، وإذا افترضناه b. فتكون إحداثيات النقطة Y هي $\left(\frac{a}{2}, b\right)$.





2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.

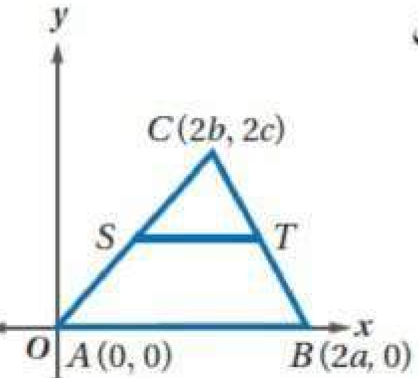


$A(0, a), B(0, 0), C(a, 0)$





اكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.



اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه A. واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2.

المعطيات: $\triangle ABC$ ، فيه:

S نقطة منتصف $\overline{AC}$،

T نقطة منتصف $\overline{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات S هي: $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$.

وكذلك إحداثيات T هي: $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$.

وبتطبيق قانون الميل فإن ميل $\overline{ST}$ هو: $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$.

وميل $\overline{AB}$ هو: $\frac{0-0}{2a-0} = 0$.

وبما أن ميل $\overline{ST}$ يساوي ميل $\overline{AB}$، فإن $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$.

إرشادات للدراسة

البرهان الإحداثي

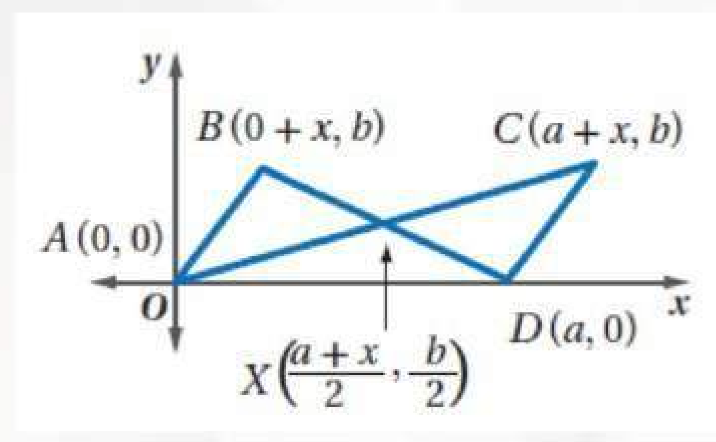
تنطبق الإرشادات والطرائق المستعملة في هذا الدرس على كل المضلعات، ولا تقتصر على المثلثات.





3) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن:

$\triangle ABX \cong \triangle CDX$.



نقطة منتصف $\overline{BD}$ هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثي نقطة منتصف $\overline{AC}$ = إحداثي نقطة منتصف $\overline{BD}$ = إحداثي النقطة X؛ لذا $\overline{AC}$ تُنصِّف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ تنصِّف $\overline{AC}$، وذلك بتعريف المنَصف.

وهذا يعني أن X هي منتصف كلٍّ من $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ أي أن:

$\overline{BX} \cong \overline{XD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{XC}$، وذلك بتعريف نقطة المنصَف.

$$CD = \sqrt{((a+x)-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}$$

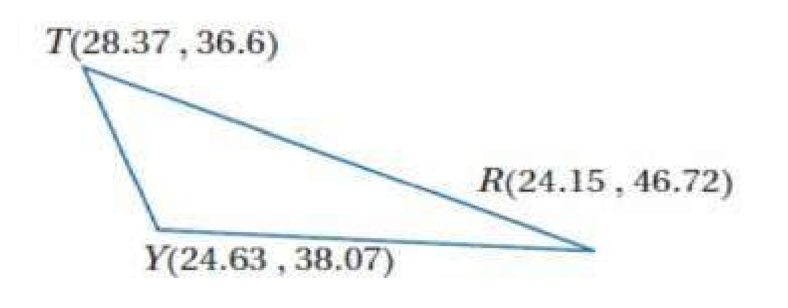
$$AB = \sqrt{((0+x)-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2+b^2}$$

إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\triangle ABX \cong \triangle CDX$ بحسب SSS.

مثال 4 من واقع الحياة **تصنيف المثلثات**

جغرافيا: إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكل من الرياض وينبع وتبوك هي:
الرياض **24.15°N 46.72°E**، ينبع **24.63°N 38.07°E**، تبوك **28.37°N 36.6°E**، فاكتب برهانًا إحداثيًا يبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم. ولتكن R تمثّل الرياض، Y تمثّل ينبع ، T تمثّل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في $\triangle RYT$ فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2}$$
$$\approx 8.66$$

$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2}$$
$$\approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2}$$
$$\approx 4.02$$

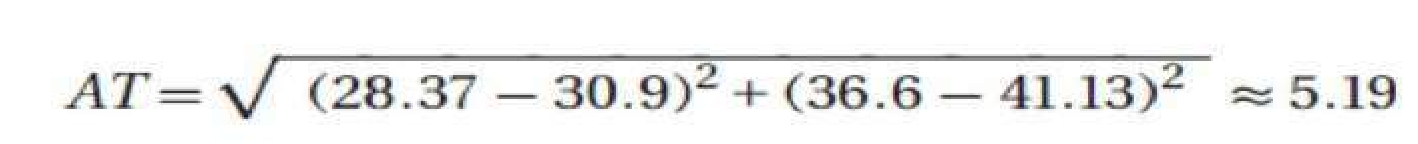


وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة فهو مثلث مختلف الأضلاع. أيّ أن المثلث الذي رؤوسه الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.

4) **جغرافيا:** يضم مجمع كشفي ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا.
إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:
تبوك 28.37°N36.6°E ، عرعر 30.9°N41.13°E ،
حائل 27.43°N41.68°E، فاكتب برهانًا إحداثيًّا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.



4) افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، و A ترمز لمدينة عرعر، و H لمدينة حائل .



$$AT = \sqrt{(28.37 - 30.9)^2 + (36.6 - 41.13)^2} \approx 5.19$$



$$HT = \sqrt{(28.37 - 27.43)^2 + (36.6 - 41.68)^2} \approx 5.17$$



$$AH = \sqrt{(30.9 - 27.43)^2 + (41.13 - 41.68)^2} \approx 3.51 ،$$

وبما أن $AT \approx HT$، إذن $\triangle ATH$ متطابق الضلعين تقريبًا.





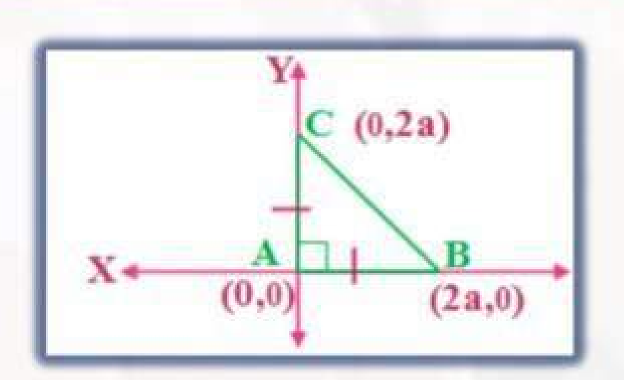


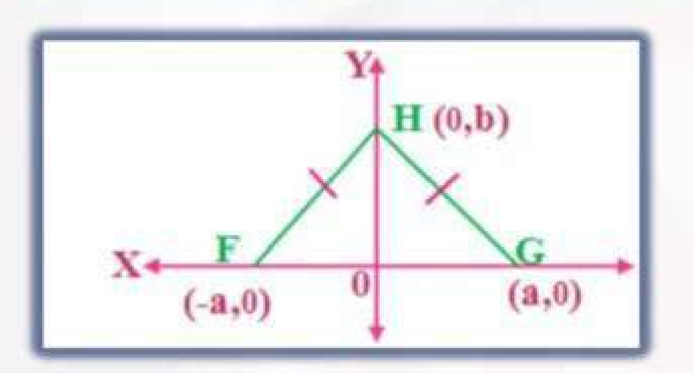
ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه :

1) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، فيه $\overline{AC}, \overline{AB}$ ضلعا القائمة، وطول $\overline{AC}$ يساوي $2a$ وحدة، وطول $\overline{AB}$ يساوي $2b$ وحدة.

2) $\triangle FGH$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{FG}$ يساوي $2a$ وحدة.





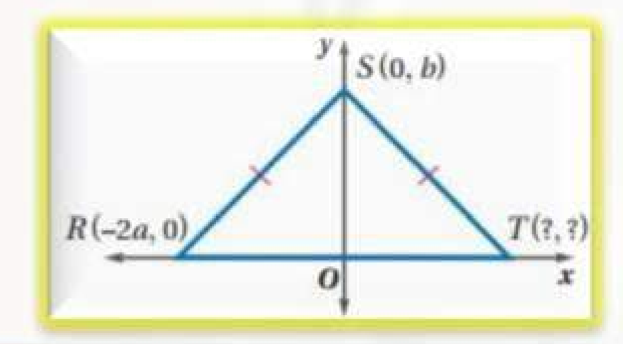






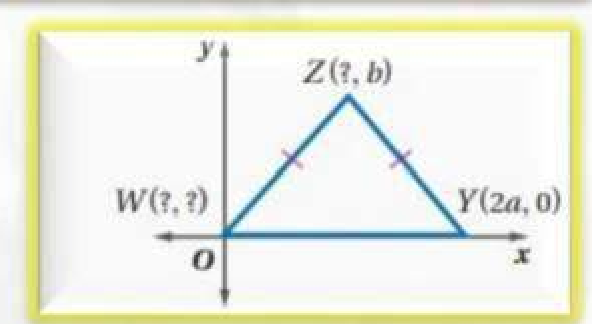


أوجد الاحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين :





وبما أن الرأس T يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة T تقع عند النقطة $(2a , 0)$



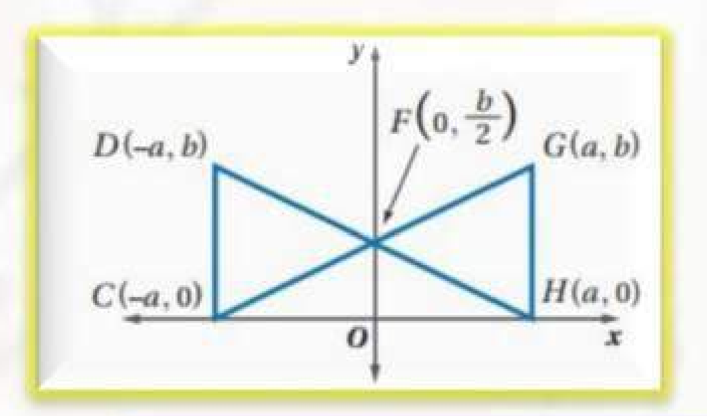
بما أن الرأس W يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0 , 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس Z يقع في منتصف المسافة بين $0 , 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي Z : (a , b)





اكتب برهاناً احداثياً لإثبات أن $\Delta FGH \cong \Delta FDC$.



الحل

$$DC = \sqrt{(-a-(-a))^2 + (b-0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = b$$

بما أن $DC = GH$ ، فإن $\overline{DC} \cong \overline{GH}$

$$DF = \sqrt{(0-a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$GF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

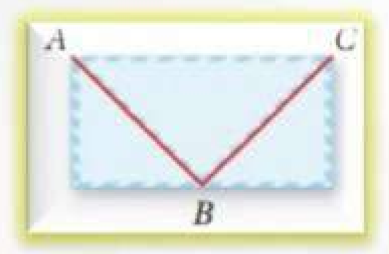
$$CF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$HF = \sqrt{(a-0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$\Delta FGH \cong \Delta FDC$ بحسب SSS



المثال ٤



6) اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين، علمًا بأن بُعدَي المظروف هما: 10 cm, 20 cm، والنقطة B في منتصف الحافة السفلى للمظروف.

الحل



استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB=\sqrt{(0-10)^2+(10-0)^2}=\sqrt{200}$$

$$BC=\sqrt{(20-10)^2+(10-0)^2}=\sqrt{200}$$

وبما أن $AB=BC$ ، فإن $\overline{AB}\cong\overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:

ΔABC متطابق الضلعين.



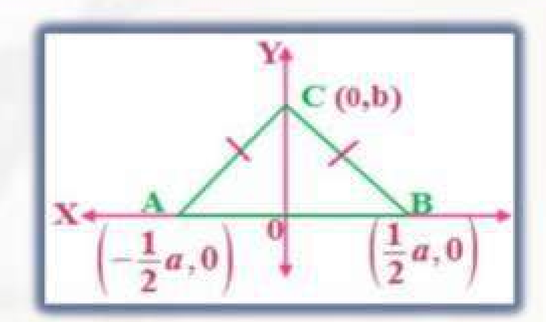




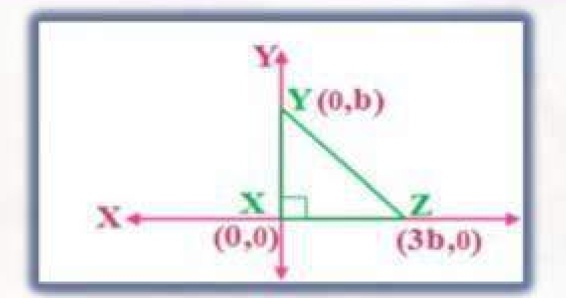
ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوى الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه :

7) $\triangle ABC$ المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته $\overline{AB}$ يساوي a وحدة.





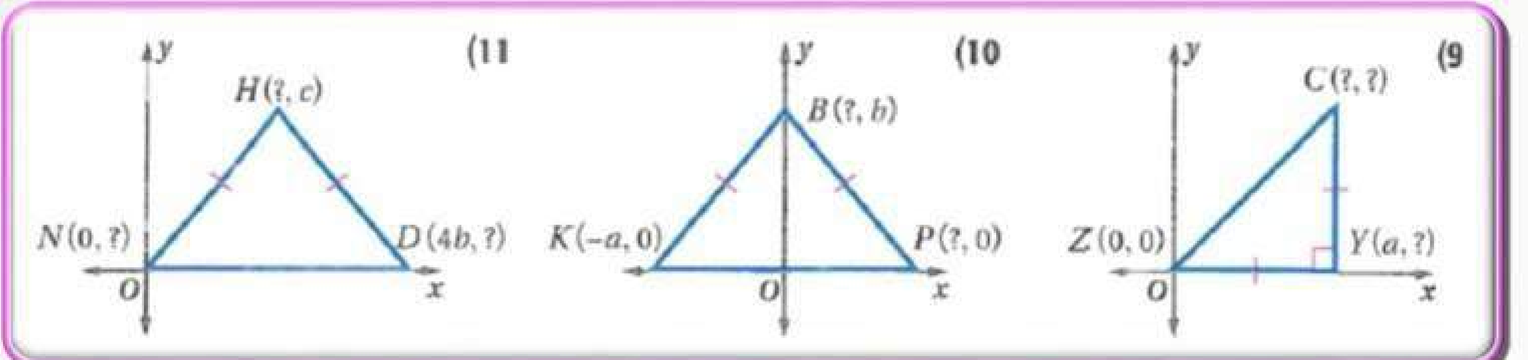
8) $\triangle XYZ$ القائم الزاوية الذي وتره YZ، وطول الضلع XY يساوي b وحدة، وطول XZ ثلاثة أمثال طول XY.







أوجد الاحداثيات المجهوله في كل مثلث مما يأتي:





وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الاحداثي Y= 0 وتكون الرأس Y: (a,0)

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس C: (a, a)

وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الاحداثي X= 0 وتكون الرأس B: (0, b)

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن b تقع في المنتصف اذن النقطة P C: (a, 0)

وبما أن الرأس N يقع عند نقطة الاصل فإن احداثياته هي (0,0)

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الاحداثي Y= 0 وتكون الرأس D: (4b, 0)

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الاحداثي X للرأس H يقع في منتصف المسافة بين 4b , 0 ويكون 2b إذن الاحداثي الرأسي H (2b, C)





اكتب برهانا احداثيا لكل عبارة من العبارات الاتية

12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكّل مثلثا متطابق الضلعين أيضًا.



إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (a, 0)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

$$RT = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

لاحظ أن $RT = ST$، وهذا يعني أن $\overline{ST} \cong \overline{RT}$، لذا فالمثلث ΔRST متطابق



13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.



إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

إذن $ST = \frac{1}{2} AB$

14) **جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جيزان ونجران وخميس مشيط هي:
جيزان 16.9°N 42.58°E ، نجران 17.5°N 44.16°E ، خميس مشيط 18.3°N 42.8°E، فبيّن أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

الحل

المسافة بين جيزان ونجران: $\sqrt{(16.9-17.5)^2 + (42.58-44.16)^2} \approx 1.69$

المسافة بين جيزان وخميس: $\sqrt{(16.9-18.3)^2 + (42.58-42.8)^2} \approx 1.42$

المسافة بين نجران وخميس: $\sqrt{(17.5-18.3)^2 + (44.16-42.8)^2} \approx 1.58$ وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



في $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضّح إجابتك:

15) $X(0,0), Y(2h,2h), Z(4h,0)$ 16) $X(0,0), Y(1,h), Z(2h,0)$

الحل

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2h-0}{2h-0} = 1$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2h}{4h-2h} = -1$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-0}{4h-0} = 0$$

ميل XY يساوي 1، ميل YZ يساوي -1 ميل ZX يساوي صفرا

وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فانه قائم الزاوية.

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h-0}{1-0} = h$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-h}{2h-1} = \frac{-h}{2h-1}$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-0}{2h-0} = 0$$

ميل XY يساوي h، ميل YZ يساوي $\frac{-h}{2h-1}$ ميل ZX يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية



17) **نزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزَّه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزَّه تقع عند النقطة $(0, 0)$، وأن إحداثيات موقعَي الخيمتين هما $(12, 9)$, $(0, 25)$. فاكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزَّه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.



ميل الطريق الواصل بين الخيميتين يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 25}{12 - 0} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند $(12,9)$ يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{12 - 0} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

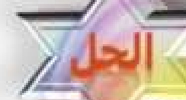
وبما أن $\frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$ ، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزة مثلث قائم الزاوية.



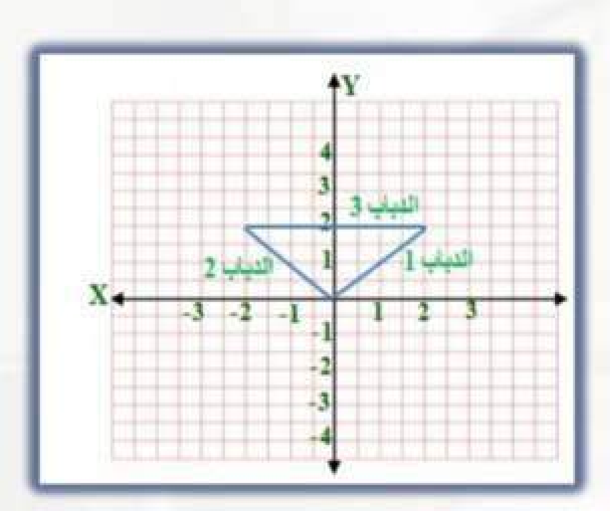
18) **رياضة مائية:** انطلقت ثلاثة قوارب مائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.

توقف القاربان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريبًا من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

a) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0 ,0)، فمثّل هذا الوضع بيانيًا، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني. وفسّر إجابتك.



القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات =0



لذا ميل معادلة سير القارب الأول 1 =، معادلته هي $y = x$

بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل والجزء المقطوع من محور الصادات =0

لذا ميل معادلة سير القارب الثاني= (1-) و معادلته هي $y = -x$

القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي $x = 0$



b) اكتب برهانا حرًا لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تُشكّل مثلثا قائم الزاوية متطابق الضلعين.



المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الاول والثاني 300M، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان .ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الاول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسّر إجابتك.

الدباب الاول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الاصل لذا مسار الدباب الاول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع .
نفرض X طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

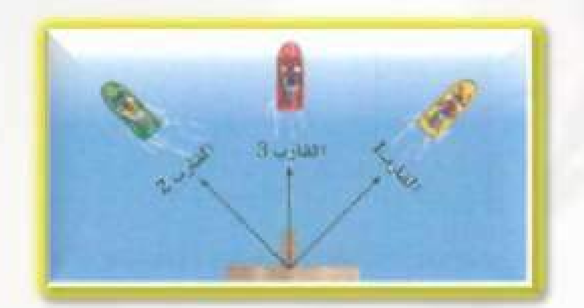
$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

بالمثل للدباب الثاني نفرض ان Y طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$





حيث أن مسار الدباب الاول يقع في الربع الاول ، لذا فإن احداثياته هي:

$\left(150\sqrt{2}\ .\ 150\sqrt{2}\right)$

بالمثل الدباب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:

$\left(-150\sqrt{2}\ .150\sqrt{2}\right)$

الدباب الثالث سار **إلى الشمال .yd 212 على محور الصادات، لذا احداثياته هي**

$(0\ .\ 212)$



d) اكتب برهانا إحداثيًا لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريبًا، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.



$\because 150\sqrt{2} \approx 212.13$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريبا نفس الإحداثي الصادي، أي تقريبا على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الاول و الثاني:

$$\left(\frac{150\sqrt{2}+\left(-150\sqrt{2}\right)}{2} \ . \ \frac{212+212}{2}\right)=(0\ .\ 212)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.





تحدٍّ: إذا كانت إحداثيات النقطة J هي $(0, 0)$، والنقطة K هي $(2a, 2b)$، فأوجد إحداثيات النقطة L، على أن يكون $\triangle JKL$ من النوع المحدّد في كلٍّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

19) مثلث مختلف الأضلاع

20) مثلث قائم الزاوية

21) مثلث متطابق الضلعين

الحل

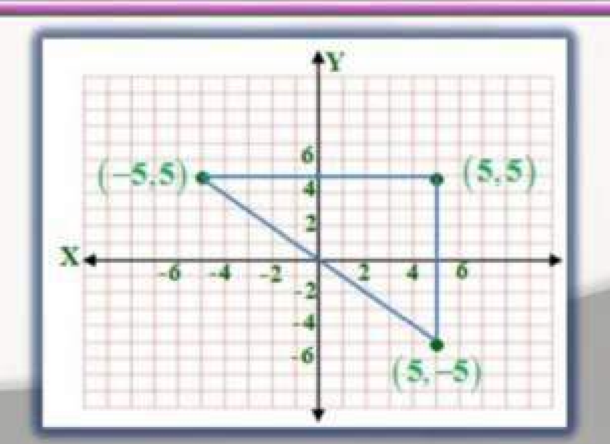
L : (a,0)

L : (2 a,0)

بما أن المثلث متطابق الضلعين والنقطة K تقع في متصف المسافة بين الرأس J , L إذن النقطة L : (4a,0)

22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدِّد إحداثيات كل رأسٍ من رؤوسه.

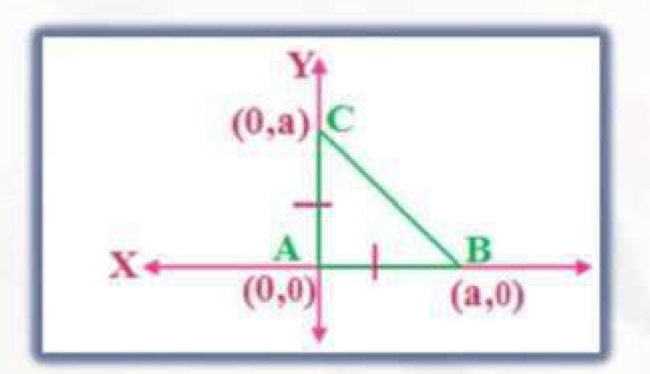
الحل





23) **تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلث هما: $(a, 0)$, $(0, 0)$. إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة a، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدّد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.





بما أن الرأس الثالث يقع على محور Y

إذن X = 0 وتكون إحداثيات الرأس (0,A)



24) **اكتب:** وضّح فائدة اتباع كلٍّ من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.





a) استعمال نقطة الاصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لأن إحداثيات نقطة الأصل (0,0)

b) ارسم ضلعًا واحدًا على الأقل من أضلاع المثلث على المحور x أو المحور y.

b)رسم ضلع واحد على الاقل للمثلث على المحور X أو المحور Y يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لأن احد الإحداثيات يكون 0

c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

C)رسم المثلث في الربع الاول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.